ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ UNCONDITIONAL ΒΑΣΗΣ SCHAUDER ΣΕ ΧΩΡΟΥΣ BANACH

Δήμογλου Κωνσταντίνος

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ, 2019

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

που απονέμει το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.

Εγκρίθηκε την 1η Ιουλίου 2019 από την εξεταστική επιτροπή:

Εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
1. Ανδρέας Τόλιας (Επιβλέπων)	Επίκουρος Καθηγητής
2. Ελευθέριος Νικολιδάκης	Επίκουρος Καθηγητής
3. Κυριάκος Μαυρίδης	Λέκτορας

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή.

Δήμογλου Κωνσταντίνος

Στους γονείς μου,
για την συνεχή στήριξή τους

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τους αθρώπους που συνέβαλαν άμεσα και έμμεσα στην περάτωση των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Αρχικά, ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Ανδρέα Τόλια για την πολύτιμη βοήθειά του, την επιστημονική καθοδήγηση του και τον χρόνο που μου αφιέρωσε καθόλη τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Κυριάκο Μαυρίδη και Ελευθέριο Νικολιδάκη για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Επιτροπή Κρίσης της διατριβής αυτής. Επιπλέον, οφείλω να ευχαριστήσω κάθε καθηγητή μου στο Τμήμα Μαθηματικών του πανεπιστημίου Ιωαννίνων, για τις γνώσεις που μου πρόσεφερε ως διδάσκων όλα αυτά τα χρόνια. Τέλος, ευχαριστώ και ευγνωμονώ τους γονείς μου που με στήριξαν καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Σε αυτή τη μεταπτυχιακή διατριβή παρουσιάζουμε μια εισαγωγή στη θεωρία βάσεων Schauder σε χώρους Banach και κάποια βασικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια, μελετούμε την κλάση των unconditional βάσεων Schauder και δίνουμε έναν πλήρη χαρακτηρισμό των χώρων c_0 και ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$. Τέλος, παρουσιάζουμε την απόδειξη ότι οι c_0, ℓ_1 και ℓ_2 είναι οι μοναδικοί χώροι Banach με την ιδιότητα δύο οποιεσδήποτε μοναδιαίες unconditional βάσεις τους $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι μεταξύ τους ισοδύναμες (πρόβλημα μοναδικότητας unconditional βάσης, ως προς ισοδυναμία).

Abstract

In this master thesis we present an introduction to Schauder bases theory in Banach spaces and some basic results. Subsequently, we study the class of unconditional Schauder bases and we give a complete characterization of the spaces c_0 and ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$. Finally, we present the proof that c_0, ℓ_1 and ℓ_2 are the only Banach spaces for which for every pair $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of normalized unconditional bases of them, the bases $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are equivalent (problem of uniqueness of unconditional basis, up to equivalence).

Εισαγωγή

Στη μελέτη γραμμικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, συχνά είναι χρήσιμο να επιλέγουμε μία αλγεβρική βάση και έπειτα να εργαζόμαστε με το σύστημα συντεταγμένων αυτής. Σε έναν γραμμικό χώρο άπειρης διάστασης, παρόλο που το αξίωμα της επιλογής μας επιτρέπει να επιλέξουμε αλγεβρική βάση σε αυτόν, μια τέτοια βάση δεν είναι χρήσιμη, ούτε και είναι εύκολο να περιγραφεί. Στη μελέτη των χώρων Banach είναι χρήσιμη η έννοια της βάσης Schauder. Μια ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων σ′ έναν χώρο Banach X ονομάζεται βάση Schauder (ή απλά βάση) του X, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Μια ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι βάση Schauder για τον $\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται Schauder βασική ακολουθία. Επίσης, μια βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται μοναδιαία, αν $\|e_n\| = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για παράδειγμα η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$e_n = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n-\text{θέση}}, 0, \ldots)$$

είναι βάση Schauder καθενός από τους χώρους $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ και $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < +\infty$ και ονομάζεται συνήθης βάση του εκάστοτε χώρου. Επίσης, οι χώροι Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ και $(L_p[0,1], \|\cdot\|_p)$, για κάθε $1 \leq p < +\infty$ διαθέτουν ο καθένας τους βάση Shauder, τις οποίες και μελετούμε μέσα στην εργασία. Μια προφανής παρατήρηση είναι ότι κάθε χώρος Banach με βάση Schauder είναι διαχωρίσιμος, και άρα οι μη διαχωρίσιμοι χώροι δεν διαθέτουν βάση Schauder. Επίσης, ο P. Enflo [5] κατασκεύασε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach χωρίς βάση Schauder. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε το συναρτησοειδές $e_n^*\colon X \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$e_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right) = \alpha_n.$$

Τα $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγονται διορθογώνια συναρτησοειδή της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ιδαίτερο ρόλο στη μελέτη των χώρων Banach, παίζουν οι έννοιες της συρρικνούσας βάσης και της φραγμένα πλήρους βάσης. Μία βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται συρρικνούσα, αν η ακολουθία $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X^*. Παρατηρούμε ότι η συνήθης βάση του c_0 καθώς και η συνήθης βάση του ℓ_p, για $1 < p < +\infty$ είναι συρρικνούσα, ενώ η συνήθης βάση του ℓ_1 δεν είναι.

Μια βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται φραγμένα πλήρης, αν για κάθε πραγματική ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right\| < +\infty$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ συγκλίνει στον X. Παρατηρούμε ότι η συνήθης βάση του ℓ_p, για $1 \leq p < +\infty$ είναι φραγμένα πλήρης, ενώ η συνήθης βάση του c_0 δεν είναι.

Η εργασία αποτελείται από τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο, η μελέτη ενός χώρου Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξεκινά με την κατασκευή ενός χώρου Banach Σ και στην ισομορφική εμφύτευση του X, στον Σ. Συγκεκριμένα,

$$\Sigma := \left\{ \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < +\infty \right\}$$

με νόρμα

$$|||\alpha||| := \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < +\infty, \text{για κάθε } \alpha \in \Sigma.$$

Αποδεικνύεται ότι ο $T\colon X \to \Sigma$ με τύπο $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) := (\alpha_n) = \alpha \in \Sigma$ είναι ισομορφική εμφύτευση. Έτσι, ο X εμφυτεύεται σε έναν χώρο ακολουθιών.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται αναλυτικά το Θεώρημα του R. C. James [11] με βάση το οποίο για τυχαίο χώρο Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα και φραγμένα πλήρης αν και μόνο αν ο X είναι αυτοπαθής. Μετά παρουσιάζουμε με αναλυτικό τρόπο μια πληθώρα παραδειγμάτων χώρων Banach με βάση Schauder. Έπειτα, παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα του Mazur που αναφέρει ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει Schauder βασική ακολουθία.

Αν X χώρος Banach με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $x_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αν υπάρχουν ακολουθίες $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ και $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{N}$, τέτοιες, ώστε

$$x_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_i e_i, \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots \ .$$

Αν X και Y χώροι Banach με βάσεις Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αντίστοιχα, οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγονται ισοδύναμες, αν για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ συγκλίνει.

Στην τελευταία παράγραφο του πρώτου κεφαλαίου έχουμε εφαρμογές της παραπάνω θεωρίας στη μελέτη των υποχώρων των c_0 και ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$. Συγκεκριμένα, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε πρώτα το Θεώρημα Διάσπασης του Pelczynski [19] και στη συνέχεια ως μια άμεση συνέπεια αυτού παίρνουμε ότι κάθε απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος Y του ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ (αντίστοιχα του c_0), είναι ισόμορφος με τον ℓ_p (αντίστοιχα με τον c_0). Αυτό ουσιαστικά μας δίνει έναν πλήρη χαρακτηρισμό των συμπληρωματικών υποχώρων καθενός από τους c_0 και ℓ_p, για $1 \leq p < +\infty$.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, ορίζουμε μια ισχυρότερη έννοια βάσης, την unconditional βάση. Μια βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται unconditional βάση του X, αν για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ συγκλίνει, τότε για κάθε επιλογή προσήμων $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (δηλαδή, $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$), η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \alpha_n e_n$ συγκλίνει. Επίσης, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται unconditional βασική, αν είναι unconditional βάση του $\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Το ερώτημα αν κάθε χώρος Banach έχει unconditional βασική ακολουθία, το οποίο τέθηκε από τους C. Bessaga και A. Pelczynski [2], αποτέλεσε για δεκαετίες ένα κεντρικό πρόβλημα στη θεωρία των χώρων Banach και απαντήθηκε αρνητικά από τους Gowers και Maurey [9] το 1993. Συγκεκριμένα, κατασκεύασαν έναν χώρο Banach, ο οποίος δεν είχε κανέναν υπόχωρο με unconditional βάση.

Επίσης, παρουσιάζουμε την απόδειξη του θεωρήματος του R. C. James [11] ότι για τυχαίο χώρο Banach X με unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν οι χώροι ℓ_1 και c_0 δεν εμφυτεύονται ισομορφικά στον X.

Η τελευταία παράγραφος του δευτέρου κεφαλαίου είναι αφιερωμένη στην απόδειξη του Θεωρήματος του M. Zippin [25] το οποίο χαρακτηρίζει πλήρως τους χώρους c_0 και ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$. Συγκεκριμένα, αν ο X είναι χώρος Banach με μοναδιαία βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με κάθε μοναδιαία block βάση της, τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0 ή με τη συνήθη βάση του ℓ_p, για κάποιο $1 \leq p < +\infty$.

Στο τρίτο κεφάλαιο, στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε αυτούς τους χώρους Banach για τους οποίους δύο τυχαίες μοναδιαίες unconditional βάσεις, είναι ισοδύναμες. Αυτό ονομάζεται πρόβλημα μοναδικότητας unconditional βάσης (ως προς ισοδυναμία). Το γενικό Θεώρημα του οποίου η απόδειξη οφείλεται στους J. Lindenstrauss και M. Zippin [17] έχει την εξής διατύπωση:

Θεώρημα. *Έστω ένας χώρος Banach X με unconditional βάση. Δύο οποιεσδήποτε μοναδιαίες unconditional βάσεις του X είναι ισοδύναμες, αν και μόνο αν ο X είναι ισομορφικός με έναν από τους χώρους:* c_0, ℓ_1, ℓ_2.

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θα χρησιμοποιήσουμε στοιχεία της θεωρίας των $p-$αθροίσιμων τελεστών και των συμμετρικών βάσεων. Αν X, Y δύο χώροι Banach και $p \geq 1$. Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ ονομάζεται $p-$απολύτως αθροίσιμος, αν υπάρχει $K \geq 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$, να ισχύει:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p\right)^{1/p} \leq K \cdot \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}.$$

Για την απόδειξη της αναγκαίας κατεύθυνσης του παραπάνω θεωρήματος κάνουμε χρήση των ανισοτήτων Kintchine [3] και Grothendieck [14]. Για την ικανή κατεύθυνση χρησιμοποιούμε την έννοια των συμμετρικών βάσεων. Συγκεκριμένα, αν X είναι ένας χώρος Banach με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται συμμετρική βάση, αν για κάθε μετάθεση $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ακολουθία $(e_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Κεφάλαιο 1

Βάσεις Schauder χώρων Banach

1.1 Η έννοια της βάσης Schauder

Μια σημαντική κατηγορία χώρων στη συναρτησιακή ανάλυση είναι οι χώροι Banach με βάση Schauder. Όπως συμβαίνει με την αλγεβρική έννοια της βάσης στους γραμμικούς χώρους (η οποία πάντα υπάρχει), η συναρτησιακή έννοια της βάσης Schauder (όταν αυτή υπάρχει) είναι χρήσιμη, αφού μας επιτρέπει να γράφουμε κάθε στοιχείο του χώρου κατά μοναδικό τρόπο σαν σειρά.

Ορισμός 1.1.1. *Έστω χώρος Banach X. Μια ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X ονομάζεται **βάση Schauder (Schauder basis)** του X, αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \quad \left(\Leftrightarrow \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \xrightarrow{n} 0 \right).$$

*Μια ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι βάση Schauder για τον $\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ λέγεται **Schauder βασική ακολουθία (Schauder basic sequence)**. Μια βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται **μοναδιαία (normalized)** , αν $\|e_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Μια βασική ιδιότητα που ισχύει τόσο για τις αλγεβρικές βάσεις, όσο και για τις βάσεις Schauder είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 1.1.2. *Ας είναι οι χώροι Banach X, Y και ισομορφισμός $T\colon X \to Y$. Αν η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X , τότε η ακολουθία $(T(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του χώρου Y.*

Απόδειξη. Έστω $y \in Y$. Εφόσον ο τελεστής T είναι επί, υπάρχει $x \in X$ ώστε $T(x) = y$. Επειδή, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X, για κάθε $x \in X$, υπάρχει $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Από τα προαναφερθέντα και την συνέχεια του τελεστή T, έπεται

$$\begin{aligned} y = T(x) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) = T\left(\lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \lim_n T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= \lim_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(e_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T(e_n). \end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $y \in Y$, ισχύει $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T(e_n)$.
Για τη μοναδικότητα της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι αν

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T(e_n) = 0, \text{ τότε } \alpha_n = 0, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots .$$

Πραγματικά, από την μοναδικότητα των συντελεστών α_n και το γεγονός ότι ο T είναι 1-1, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T(e_n) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots .$$

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι για κάθε $x \in X$, υπάρχουν ακολουθίες πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοιες, ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$, τότε από το προηγούμενο συνάγουμε ότι

$$\alpha_n = \beta_n, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots .$$

□

Γνωρίζουμε ότι σε κάθε γραμμικό χώρο πάντοτε υπάρχει αλγεβρική βάση. Ένα εύλογο ερώτημα λοιπόν είναι αν σε κάθε χώρο Banach έχουμε πάντοτε βάση Schauder. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι ένας μη διαχωρίσιμος χώρος Banach δεν μπορεί να έχει βάση Schauder.

Πρόταση 1.1.3. *Αν ο X είναι ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τότε ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Ορίζουμε το αριθμήσιμο σύνολο $D = \left\{\sum_{k=1}^{n} q_k e_k : n \in \mathbb{N},\ q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}\right\}$. Θα αποδείξουμε ότι το D είναι πυκνό στον X. Ας είναι $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1}$$

Θέτουμε

$$M = \max\{\|e_i\| : i = 1, 2, \dots n\} > 0.$$

Επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, για κάθε $k = 1, \dots, n$, υπάρχει $q_k \in \mathbb{Q}$ τέτοια, ώστε

$$|q_k - \alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2nM}. \tag{1.2}$$

Τότε $z = \sum_{k=1}^{n} q_k e_k \in D$ και από τις σχέσεις (1.1) και (1.2) έχουμε

$$\begin{aligned} \|x - z\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} q_k e_k \right\| &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - q_k) e_k \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k - q_k| \|e_k\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + nM \frac{\varepsilon}{2nM} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Επομένως, ο X είναι διαχωρίσιμος. □

Παρατήρηση 1.1.4. *Το αντίστροφο της Πρότασης 1.1.3 γενικά δεν ισχύει. Ο P. Enflo [5] έδωσε το πρώτο παράδειγμα υποχώρου του c_0 χωρίς βάση Schauder. Συγκεκριμένα, κατασκεύασε έναν υπόχωρο του c_0 χωρίς την Approximation Property. Λέμε ότι ένας χώρος Banach X έχει την* ***Approximation Property****, αν και μόνο αν για κάθε συμπαγές $K \subset X$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας γραμμικός, φραγμένος και πεπερασμένης βαθμίδας τελεστής $T\colon X \to X$ τέτοιος, ώστε $\|x - Tx\| < \varepsilon$, για κάθε $x \in K$. Γενικά, ένας χώρος Banach με βάση Schauder έχει την Approximation Property, και άρα ο χώρος του P. Enflo είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach χωρίς βάση Schauder. Ένας ακόμα χώρος που δεν ικανοποιεί την Approximation Property είναι ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ και δόθηκε αργότερα από τον A.Szankowski [23] .*

Η μελέτη χώρων Banach με βάση Schauder εστιάζεται στην κατασκευή δύο «συναφών» χώρων Banach Σ και Z και στις ισομορφικές εμφυτεύσεις $T\colon X \to \Sigma$ και $J\colon X \to \mathrm{Z}^*$ τις οποίες αναλύουμε στη συνέχεια. Όλες οι θεμελιώδεις ιδιότητες των βάσεων απορρέουν από τη μελέτη αυτών των εμφυτεύσεων.

Ορισμός 1.1.5. *Έστω χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
Θέτουμε

$$\Sigma := \left\{ \alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < +\infty \right\}$$

και

$$|||\alpha||| := \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < +\infty, \text{ για κάθε } \alpha \in \Sigma$$

και $T\colon X \to \Sigma$ τέτοια, ώστε $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right) := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha \in \Sigma.$

Παρατήρηση 1.1.6. *Ο τελεστής T είναι καλά ορισμένος.*

Πραγματικά, ένα τυχαίο $x \in X$ μπορεί να γραφεί ως $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ και από τη συνέχεια της νόρμας, έχουμε $\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \xrightarrow{n} \|x\|$. Άρα, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \leq \|x\| + \varepsilon.$$

Εφόσον οι αριθμοί $\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|$ για $n < n_0$, είναι πεπερασμένοι το πλήθος, τελικά έπεται ότι

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| < +\infty.$$

Πρόταση 1.1.7. *Ο Σ είναι χώρος Banach και η απεικόνιση $T\colon X \to \Sigma$ είναι ισομορφική εμφύτευση.*

Απόδειξη. Έυκολα ελέγχεται ότι ο Σ είναι γραμμικός χώρος με πράξεις κατά συντεταγμένη και οτι η απεικόνιση $|||\cdot|||$ είναι νόρμα στον Σ.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο $(\Sigma, |||\cdot|||)$ είναι χώρος Banach. Έστω μια ακολουθία Cauchy $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στον Σ. Τότε, $s_m = (\alpha_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $m = 1, 2, \dots$. Θα αποδείξουμε ότι η $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον Σ. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $m, l, n \in \mathbb{N}$, είναι

$$|\alpha_{m,n} - \alpha_{l,n}| \cdot ||e_n|| = \left\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k})e_k - \sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k})e_k\right\| \le$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k})e_k\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k})e_k\right\| \le |||s_m - s_l||| + |||s_m - s_l||| = 2|||s_m - s_l|||.$$

Επομένως, η $(\alpha_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}$, και άρα συγκλίνουσα. Θέτουμε $\alpha_n := \lim\limits_m \alpha_{m,n}$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και $s := (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ισχυρισμός 1. *$s \in \Sigma$.*

Πραγματικά, αφου η $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Σ, έπεται ότι είναι και φραγμένη. Οπότε, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο, ώστε $|||s_m||| = \sup\limits_n \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{m,k}e_k\right\| \le M$, για κάθε $m = 1, 2, \dots$. Από τη συνέχεια της νόρμας και εφόσον για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $\alpha_{m,n} \xrightarrow{m} \alpha_n$, έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \left(\lim_m \alpha_{m,k}\right) e_k\right\| = \lim_m \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k}e_k\right\| \le M.$$

Ισχυρισμός 2. *Ισχύει $|||s_m - s||| \xrightarrow{m} 0$.*

Πραγματικά, έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Σ, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε για κάθε $m, l \ge m_0$ να ισχύει

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k})e_k\right\| < \frac{\varepsilon}{2}\ , \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots\ .$$

Παίρνοντας το όριο για $l \to +\infty$, για κάθε $m \ge m_0$ και $n = 1, 2, \dots$, προκύπτει ότι

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{m,k} - \alpha_k)e_k\right\| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως, $|||s_m - s||| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, για κάθε $m \ge m_0$.

Μένει να αποδείξουμε ότι ο τελεστής $T\colon X \to \Sigma$ είναι ισομορφική εμφύτευση. Προφανώς, από τον τρόπο που έχει οριστεί ο τελεστής T, είναι γραμμικός και 1-1. Αν $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$, τότε $\left\|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| \xrightarrow{n} \|x\|$. Αυτό σημαίνει ότι $\|x\| \le \sup\limits_n \left\|\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|$, και άρα $\|x\| \le |||T(x)|||$, για κάθε $x \in X$. Επομένως, ο $T^{-1}\colon T(X) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Με βάση το

Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης, αρκεί να δείξουμε ότι ο $T(X)$ είναι χώρος Banach. Όντας ο $T(X)$ υπόχωρος του Σ και ο $(\Sigma, |||\cdot|||)$ χώρος Banach, αρκεί να αποδείξουμε ότι $T(X)$ κλειστό υποσύνολο του Σ. Είναι,

$$T(X) := \left\{ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma : \text{ υπάρχει } x \in X \text{ ώστε } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\} .$$

Ας είναι ακολουθία $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στον T(X) και $s \in \Sigma$ έτσι, ώστε $s_m \xrightarrow{|||\cdot|||} s$.
Θα αποδείξουμε ότι το $s \in$ T(X). Θέτουμε $s_m = (\alpha_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $s = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αφού $s_m \xrightarrow{|||\cdot|||} s$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $|||s_m - s||| < \frac{\varepsilon}{3}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_k) e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ , για κάθε } n \in \mathbb{N} . \tag{1.3}$$

Θέτουμε $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k} e_k$ και $x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Εφόσον $s_m \in T(X)$, η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα, και άρα ακολουθία Cauchy. Έτσι, από το Κριτήριο Σύγκλισης του Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε

$$\|y_n - y_l\| = \left\| \sum_{k=l+1}^{n} \alpha_{m,k} e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ , για κάθε } n > l \geq n_0. \tag{1.4}$$

Για κάθε $n > l \geq n_0$ από τις (1.3) και (1.4) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_l\| = \left\| \sum_{k=l+1}^{n} \alpha_k e_k \right\| &= \left\| \sum_{k=l+1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_k) e_k + \sum_{k=l+1}^{n} \alpha_{m,k} e_k \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{k=l+1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_k) e_k \right\| + \left\| \sum_{k=l+1}^{n} \alpha_{m,k} e_k \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_k) e_k - \sum_{k=1}^{l} (\alpha_{m,k} - \alpha_k) e_k + \sum_{k=l+1}^{n} \alpha_{m,k} e_k \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_k) e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{l} (\alpha_{m,k} - \alpha_k) e_k \right\| + \left\| \sum_{k=l+1}^{n} \alpha_{m,k} e_k \right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Επομένως, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία του Cauchy στον χώρο Banach X και συνεπώς συγκλίνουσα στον X. Οπότε, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο, ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, δηλαδή $s = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T(X)$. Άρα, το $T(X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του Σ. □

Παρατήρηση 1.1.8. *Εφόσον ο τελεστής T είναι φραγμένος,*

$$\text{υπάρχει } M > 0 \text{ ώστε } |||T(x)||| \leq M \|x\| , \text{ για κάθε } x \in X,$$

και άρα $\|x\| \leq |||T(x)||| \leq M \|x\|$, για κάθε $x \in X$. Επομένως, θέτοντας $|||x||| = |||T(x)|||$, για κάθε $x \in X$, η $|||\cdot|||$ είναι μια ισοδύναμη νόρμα στον X.

Με βάση την Πρόταση 1.1.7 αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα χαρακτηρισμού μιας ακολουθίας σε έναν χώρο Banach ως βάση Schauder.

Θεώρημα 1.1.9. *Έστω χώρος Banach X και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X.*

(ii) *Ισχύουν τα εξής:*

- (α) $e_n \neq 0$, *για κάθε* $n = 1, 2, \dots$.
- (β) *Υπάρχει σταθερά* $K \geq 0$, *ώστε για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$, *με* $n \leq m$ *και για κάθε πραγματικούς αριθμούς* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ *να ισχύει*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right\|.$$

- (γ) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X. Εξ ορισμού της βάσης Schauder του X παίρνουμε άμεσα τις (α) και (γ). Εφόσον ο $T\colon X \to \Sigma$ είναι φραγμένος,

$$\text{υπάρχει } M > 0 \text{ ώστε } |||T(x)||| \leq M \|x\|, \text{για κάθε } x \in X.$$

Θέτουμε $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$. Επομένως,

$$\left|\left|\left|T\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right)\right|\right|\right| = \sup_{n\leq m} \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| \leq |||T||| \cdot \left\|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k\right\|.$$

Αν θέσουμε $K := |||T|||$, τότε

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| \leq K \left\|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k\right\|, \text{ για κάθε } m, n \in \mathbb{N}, \text{με } n \leq m.$$

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (ii) και θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in X$, υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$.

Για την ύπαρξη : Θεωρούμε το σύνολο

$$Y := \left\{x \in X : \exists\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \text{ώστε} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right\}$$

και θα αποδείξουμε ότι

$$Y = X.$$

Είναι σαφές ότι $\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ και επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι το Y είναι κλειστό υποσύνολο του X, διότι τότε $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{Y} = Y$, και άρα $X = Y$. Ας είναι μια ακολουθία $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ στον Y και ένα $x \in X$ ώστε $x_m \xrightarrow{m} x$ και θα δείξουμε ότι $x \in Y$.

Εφόσον $(x_m)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον Y, για κάθε $m = 1, 2, \ldots,$ υπάρχει $(\alpha_{m,n})_{n\in\mathbb{N}},$ τέτοια, ώστε $x_m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} e_n$. Επίσης, από τη σχέση (ii) για κάθε m, l και $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|\alpha_{m,n} - \alpha_{l,n}| \cdot ||e_n|| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k - \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k \right\| \\
&\leq \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k \right\| \\
&\leq K \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k \right\| + K \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k \right\| \\
&\leq 2K \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k \right\| = 2K|||x_m - x_l|||.
\end{aligned}$$

Όμως, η ακολουθία $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον X, και άρα είναι Cauchy. Από αυτό παίρνουμε ότι η πραγματική ακολουθία $(\alpha_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$ και άρα συγκλίνουσα. Θέτουμε $\lim_m \alpha_{m,n} := \alpha_n,$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, n \in \mathbb{N}$. Επίσης, από την (ii) για κάθε $l, m \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k} e_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{l,k} e_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} (\alpha_{m,k} - \alpha_{l,k}) e_k \right\| \leq K \left\| x_m - x_l \right\|.$$

Από τη συνέχεια της νόρμας, παίρνοντας το όριο για $l \to +\infty$, για κάθε $m = 1, 2, \ldots,$ έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k} e_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \leq K \left\| x_m - x \right\|$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k} e_k - y_m \right\| \leq K \left\| x_m - x \right\|. \tag{1.5}$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και εφόσον $x_m \xrightarrow{m} x$, επιλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε

$$\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{3(K+1)}. \tag{1.6}$$

Τέλος, επειδή $x_m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} e_n$, επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο, ώστε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k} e_k - x_m \right\| < \frac{\varepsilon}{K+3}, \text{ για κάθε } n \geq n_0. \tag{1.7}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (1.5),(1.6) και (1.7) για κάθε $n \geq n_0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|y_m - x\| &\leq \left\| y_m - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k} e_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_{m,k} e_k - x_m \right\| + \|x_m - x\| \\ &< K \|x_m - x\| + \frac{\varepsilon}{K+3} + \|x_m - x\| \\ &< \frac{K}{3(K+1)}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{K+3} + \frac{\varepsilon}{3(K+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $x = \lim_n y_n$, και άρα $x \in Y$.

Για τη μοναδικότητα: Από τις (i) και (ii) προκύπτει ότι αν $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = 0, \text{ τότε } \alpha_n = 0, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots \,. \tag{1.8}$$

Πραγματικά, από την (ii) συνάγουμε ότι

$$\|\alpha_1 e_1\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k \right\|, \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N},$$

και άρα

$$\|\alpha_1 e_1\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\| = 0,$$

και εφόσον $e_1 \neq 0$, προκύπτει ότι $\alpha_1 = 0$. Ξανά με εφαρμογή της (ii) συνάγουμε ότι

$$\|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\| = 0,$$

και εφόσον $\alpha_1 = 0$ και $e_2 \neq 0$, προκύπτει ότι $\alpha_2 = 0$. Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι $\alpha_n = 0$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Υποθέτουμε οτι για κάθε $x \in X$, υπάρχει μια άλλη ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$.

Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) e_n = 0$$

Και από την (1.8) προκύπτει ότι

$$\alpha_n = \beta_n, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots \,.$$

□

Παρατήρηση 1.1.10. *Στο Θεώρημα 1.1.9 αν παραλείψουμε τη (γ) το συμπέρασμα ισχύει για Schauder βασικές ακολουθίες.*

1.2 Κανονικές προβολές και διορθογώνια συναρτησοειδή

Ορισμός 1.2.1. *Έστω χώρος Banach X με βάση Shauder $(e_n)_{n\in N}$. Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε ως* ***κανονικές προβολές (canonical projections)*** *της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τους τελεστές $P_n \colon X \to X$ με τύπο*

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$$

και ορίζουμε ως ***διορθογώνια συναρτησοειδή (biorthogonal functionals)*** *της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τα συναρτησοειδή $e_n^* \colon X \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$e_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right) = \alpha_n.$$

Παρατήρηση 1.2.2. *Από τον παράνω ορισμό είναι σαφές ότι:*

(i) *οι κανονικές προβολές απεικονίζουν τα στοιχεία του X στον γραμμικό υπόχωρο του X που παράγεται από τα e_i, για $i = 1, 2, \dots, n$*

(ii) $e_j^*(e_i) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ 1 & , \quad i = j \end{cases}$

Πρόταση 1.2.3. *Έστω χώρος Banach X με βάση Shauder $(e_n)_{n\in N}$.*

(i) *Κάθε κανονική προβολή $P_n \colon X \to X$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής και η οικογένεια $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.*

(ii) *$e_n^* \in X^*$ και μάλιστα $\|e_n^*\| \leq \dfrac{2K}{\|e_n\|}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $K := \sup_n \|P_n\| < +\infty$.*

Απόδειξη.

(i) Για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n \in X$ και $n \in \mathbb{N}$,

$$\|P_n(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\| \leq \|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|.$$

Οπότε, $\|P_n\| \leq M,$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα $K := \sup_n \|P_n\| \leq M$.

(ii) Είναι σαφές ότι ο τελεστής e_n^* είναι γραμμικός, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} |e_n^*(x)| = \left|e_n^*\left(\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right)\right| = |\alpha_n| \quad &= \quad \frac{\left\|P_n\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right) - P_{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right)\right\|}{\|e_n\|} \\ &\leq \quad \frac{\left\|P_n\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right)\right\| + \left\|P_{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right)\right\|}{\|e_n\|} \\ &\leq \quad \frac{2K}{\|e_n\|}\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i\right\| = \frac{2K}{\|e_n\|}\|x\|. \end{aligned}$$

Επομένως, $e_n^* \in X^*$ και $\|e_n^*\| \leq \dfrac{2K}{\|e_n\|}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 1.2.4. *Η ακολουθία των διορθογωνίων συναρτησοειδών $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι $e_n^* \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ας είναι $m, n \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$ και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ πραγματικοί αριθμοί. Από τον ορισμό του δυϊκού τελεστή, ισχύει:

$$P_n^*\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^*\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*.$$

Πραγματικά, για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \in X$, έχουμε

$$\begin{aligned} P_n^*\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^*\right)(x) &:= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)(P_n(x)) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)\left(P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\right)\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i. \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά είναι

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)(x) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i.$$

Συνεπώς,

$$\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*\right\| = \left\|P_n^*\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^*\right)\right\| \leq \underbrace{\|P_n^*\|}_{=\|P_n\|} \cdot \left\|\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^*\right\| \leq K \cdot \left\|\sum_{i=1}^m \alpha_i e_i^*\right\|.$$

Άρα, από το Θεώρημα 1.1.9 η $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική ακολουθία. □

Ορισμός 1.2.5. *Η σταθερά K για την οποία $K := \sup_n \|P_n\|$, ονομάζεται **σταθερά της βάσης (basis constant)** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θα τη συμβολίζουμε με $bc\{e_n\}$ ή απλώς με K. Άν $bc\{e_n\} = 1$ τότε η βάση λέγετα **μονότονη**. Γενικά, παρατηρούμε ότι $K \geq 1$.*

Παρατήρηση 1.2.6. *Ισχύει $|||x||| \leq K\|x\|$, για κάθε $x \in X$, όπου $K = bc\{e_n\}$.*

Πραγματικά, αν $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in X$, έχουμε

$$\begin{aligned} |||x||| &= \sup_n \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right\| = \sup_n \|P_n(x)\| \\ &\leq \sup_n \|P_n\| \cdot \|x\| = \left(\sup_n \|P_n\|\right)\|x\| \\ &= K\|x\|. \end{aligned}$$

Επομένως, αφού δείξαμε ότι $K \leq M$, όπου $M = \|T\|$ προκύπτει ότι $K = M$.

Παρατήρηση 1.2.7. *Από την Πρόταση 1.2.4 και το Θεώρημα 1.1.9 αντίστοιχα συνάγουμε ότι:*

(i) *Αν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βάση Schauder με $bc\{e_n\} = K$, τότε και η Schauder βασική ακολουθία $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει $bc\{e_n^*\} = K$.*

(ii) *Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη αν και μόνο αν για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, η ακολουθία πραγματικών αριθμών $\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα.*

(iii) *Ως προς την νόρμα $|||x||| = \sup_n \|P_n(x)\|$ στον X, η σταθερά της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισούται με 1, δηλαδή, η βάση είναι μονότονη.*

1.3 Συρρικνούσες βάσεις και φραγμένα πλήρεις βάσεις

Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο όπως θα δούμε στον χαρακτηρισμό ενός χώρου Banach ως αυτοπαθή, παίζουν η έννοια της συρρικνούσας και της φραγμένα πλήρους βάσης Schauder.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(i) *Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται **συρρικνούσα βάση (shrinking basis)**, αν η ακολουθία $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του X^*, δηλαδή, αν $Z \coloneqq \overline{\text{span}}\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\} = X^*$,*

(ii) *Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται **φραγμένα πλήρης βάση (boundedly complete basis)**, αν ο τελεστής $T\colon X \to \Sigma$ είναι επί του Σ, δηλαδή, αν για κάθε πραγματική ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k e_k\right\| < +\infty$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n e_n$ συγκλίνει στον X.*

Είδαμε παραπάνω ότι αν X είναι ένας χώρος Banach και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βάση Schauder αυτού, τότε ο τελεστής $T\colon X \to \Sigma$ είναι μία ισομορφική εμφύτευση. Γενικά, γνωρίζουμε ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά (μέσω της κανονικής εμφύτευσης) στον X^{**}.

Πρόταση 1.3.2. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των διορθογωνίων συναρτησοειδών. Τότε,*

(i) *κάθε $x \in X$ γράφεται ως*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)e_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} x(e_i^*)e_i, \tag{1.9}$$

και συμβολίζουμε με $x(e_i^*)$ την $(\tau(x))(e_i^*)$, όπου τ η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}.

(ii) *για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε τις προβολές $P_n^{**}\colon X^{**} \to X^{**}$ να ορίζονται ως*

$$P_n^{**}(x^{**}) = \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i^* \tag{1.10}$$

(iii) *η ακολουθία $(x^{**}(e_n^*))_{n\in\mathbb{N}}$ ανήκει στο σύνολο Σ.*

Απόδειξη.

(i) Έστω $x = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i \in X$, τότε από τον ορισμό της ακολουθίας $(e_n^*)_{n\in N}$ παίρνουμε $\alpha_i = e_i^*(x)$. Συνεπώς, $x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)e_i$. Εφόσον $\tau\colon X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση, η οποία ορίζεται ως

$(\tau(x))(x^*) = x^*(x) \equiv x(x^*)$, για κάθε $x \in X$ και $x^* \in X^*$, έπεται το ζητούμενο.

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό του δυϊκού τελεστή για κάθε $x^* \in X^*$, έχουμε

$$\big(P_n^{**}(x^{**})\big)(x^*) := x^{**}\big(P_n^*(x^*)\big) \tag{1.11}$$

Από την (i) για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x)e_i \in X$, έχουμε

$$\big(P_n^*(x^*)\big)(x) = x^*\big(P_n(x)\big) = x^*\left(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)x^*(e_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} x^*(e_i)e_i^*\right)(x).$$

Συνεπώς, $P_n^*(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(e_i)e_i^*$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Έτσι, η σχέση (1.11) γίνεται

$$\begin{aligned}
\big(P_n^{**}(x^{**})\big)(x^*) &:= x^{**}\big(P_n^*(x^*)\big) = x^{**}\left(\sum_{i=1}^{n} x^*(e_i)e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} x^*(e_i)x^{**}(e_i^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\tau(e_i)\right)(x^*)x^{**}(e_i^*) \equiv \sum_{i=1}^{n} e_i(x^*)x^{**}(e_i^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i(x^*) = \left(\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i\right)(x^*), \text{για κάθε } x^* \in X^*.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $P_n^{**}(x^{**}) = \sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i$,για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από την (ii) έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i\right\| = \|P_n^{**}(x^{**})\| \leq \|P_n^{**}\| \cdot \|x^{**}\| = \|P_n\| \cdot \|x^{**}\| \leq K \cdot \|x^{**}\|.$$

Επομένως, $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} x^{**}(e_i^*)e_i\right\| \leq K \cdot \|x^{**}\| < +\infty$, το οποίο παίρνουμε το ζητούμενο . □

Εφόσον, ο X εμφυτεύεται στον X^{**} και λόγω τις προηγούμενης πρότασης, μπορεί να οριστεί η «επέκταση» του τελεστή T.

Ορισμός 1.3.3. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ονομάζουμε **επέκταση του τελεστή** T τον φραγμένο γραμμικό τελεστή $\hat{T}\colon X^{**} \to \Sigma$ έτσι, ώστε*

$$\hat{T}(x^{**}) := (x^{**}(e_n^*))_{n\in\mathbb{N}}, \ \text{για κάθε } x^{**} \in X^{**}.$$

Συμβολισμός. *Ο τελεστής $\hat{T}$ συμβολίζεται επίσης με T. Ο συμβολισμός αυτός οφείλεται στην παραπάνω σύμβαση που κάναμε για την κανονική εμφύτευση. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $x \in X$, έχουμε*

$$\hat{T}(\tau(x)) := ((\tau(x))(e_n^*))_{n\in\mathbb{N}} \equiv (x(e_n^*))_{n\in\mathbb{N}} = (e_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}} = T(x).$$

Επομένως, $\hat{T} \equiv T$.

Πρόταση 1.3.4. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(i) *Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα βάση αν και μόνο αν ο τελεστής $\hat{T}$ είναι $1-1$.*

(ii) *Αν η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης, τότε ο X είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X^{**}, δηλαδή, υπάρχει ένας επί φραγμένος γραμμικός τελεστής $P\colon X^{**}\to X$ τέτοιος, ώστε $P(x)=x$, για κάθε $x\in X$.*

Απόδειξη.
(i) Έστω ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα βάση. Τότε, $Z \coloneqq \overline{\operatorname{span}}\{e_n^* : n\in\mathbb{N}\} = X^*$. Θα αποδείξουμε ότι $\operatorname{Ker}\hat{T}=\{0\}$.Έστω λοιπόν $x^{**}\in X^{**}$ τέτοιο, ώστε

$$\hat{T}(x^{**}) = x^{**}(e_n^*) = 0, \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}$$

.

Ισχυρισμός. *Αν $x^{**}\in X^{**}$, τότε $x^{**}(y^*)=0$, για κάθε $y^*\in Z$.*

Πραγματικά, ας είναι $y^*\in Z \coloneqq \overline{\operatorname{span}}\{e_n^* : n\in\mathbb{N}\}$. Τότε, για κάθε $m\in\mathbb{N}$, υπάρχει $y_m^*\in \operatorname{span}\{e_n^* : n\in\mathbb{N}\}$ τέτοιο, ώστε $y_m^* \xrightarrow{m} y^*$. Αφού $y_m^*\in\operatorname{span}\{e_n^* : n\in\mathbb{N}\}$, προκύπτει ότι

$$x^{**}(y_m^*) = x^{**}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{m,k}e_k^*\right) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_{m,k}x^{**}(e_k^*) = 0.$$

Έτσι, από τη συνέχεια του x^{**}, συνάγουμε ότι $\lim\limits_{m} x^{**}(y_m^*) = x^{**}(y^*) = 0$, για κάθε $y^*\in Z$. Όμως, από την υπόθεση $Z=X^*$, και άρα έχουμε ότι $x^{**}=0$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο τελεστής $\hat{T}$ είναι $1-1$ και θα αποδείξουμε ότι $Z=X^*$. Ας υποθέσουμε ότι $Z\neq X^*$. Τότε από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $x^{**}=0\in X^{**}$ με $x^{**}(x^*)$, για κάθε $x^*\in Z$ αλλά $x^{**}\neq 0$. Επομένως, $\hat{T}(x^{**}) \coloneqq x^{**}(e_n^*)=0$ και αφού η $\hat{T}$ είναι $1-1$, έχουμε $x^{**}=0$ το οποίο είναι άτοπο.
(ii) Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένα πλήρης ακολουθία στον X. Τότε, ο τελεστής $T\colon X\to\Sigma$ είναι επί του Σ, και άρα ο T είναι ισομορφισμός. Έτσι, $T^{-1}\colon\Sigma\to X$ είναι φραγμένος. Θέτουμε $P\coloneqq T^{-1}\circ\hat{T}\colon X^{**}\to X$, ο οποίος είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής ως σύνθεση φραγμένων γραμμικών τελεστών.

$$\begin{tikzcd}
X^{**} \arrow[r, "\hat{T}"] \arrow[dr, dashed, "P"'] & \Sigma \arrow[d, "T^{-1}"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Για κάθε $x\in X$, $P(x) = T^{-1}(\hat{T}(x)) \equiv T^{-1}\left(T(x)\right) = x$ και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 1.3.5. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα, αν και μόνο αν $\left\| x^*|_{\overline{\operatorname{span}}\{e_i:\ i>n\}} \right\| \xrightarrow{n} 0$, για κάθε $x^*\in X^*$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα και ας είναι P_n η κανονική προβολή του X. Για κάθε $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in\mathbb{R}$ και $n\leq m$ ισχύει

$$P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i^*.$$

Εφόσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα, ισχύει $\|x^* - P_n^*(x^*)\| \xrightarrow{n} 0$, για κάθε $x^* \in X^*$ και αφού $x^*\big|_{\overline{\text{span}}\{e_i:\ i>n\}} = x^* - P_n^*(x^*)$, προκύπτει το ζητούμενο.
Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $x^* \in X$, ισχύει $\left\|x^*\big|_{\overline{\text{span}}\{e_i:\ i>n\}}\right\| \xrightarrow{n} 0$.
Έστω $x \in X$.

$$|(x^* - P_n^*(x^*))(x)| = |(x^* - x^* \circ P_n)(x)| = |x^*(I_X - P_n)(x)| \leq \left\|x^*\big|_{\overline{\text{span}}\{e_i:\ i>n\}}\right\| \cdot (K+1) \cdot \|x\|.$$

Άρα,

$$\|x^* - P_n^*(x^*)\| \leq (K+1) \cdot \left\|x^*\big|_{\overline{\text{span}}\{e_i:\ i>n\}}\right\| \xrightarrow{n} 0.$$

□

Ορισμός 1.3.6. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
Θέτουμε $Z \coloneqq \overline{\text{span}}\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ και ορίζουμε τον τελεστή $J\colon X \to Z^*$ έτσι, ώστε

$$(J(x))\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^*(x), \text{ για κάθε } x \in X,$$

$$[\text{ή } (J(x))\,(z) = z(x), \text{ για κάθε } x \in X \text{ και } z \in Z]\,.$$

Πρόταση 1.3.7. *Έστω χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και K η σταθερά της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(i) *Ο τελεστής $J\colon X \to Z^*$ είναι ισομορφική εμφύτευση.*

(ii) *Αν η βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα, τότε $Z^* = X^{**}$ και η J ταυτίζεται με την κανονική εμφύτευση τ.*

(iii) *Αν η βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης, τότε η $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα και η J επί (δηλαδή, $X \cong Z^*$).*

Απόδειξη.
(i) Αρχικά, για κάθε $x \in X$ και $z \in Z$, έχουμε

$$|J(x)\,(z)| = |z(x)| \leq \|z\| \cdot \|x\|,$$

και άρα

$$\|J(x)\| \leq \|x\|, \text{ για κάθε } x \in X$$

Ισχυρισμός. $\|J(x)\| \geq \dfrac{1}{K}\|x\|$, *για κάθε $x \in X$.*

Αρκεί να δείξουμε ότι ο παραπάνω ισχυρισμός αληθεύει για κάθε $x \in \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ και έπειτα παίρνοντας όρια-κλειστή θήκη κλπ το συμπέρασμα επεκτείνεται. Ας είναι λοιπόν τυχαίο $x \in \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, τέτοια, ώστε $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ και έτσι, $P_n(x) = x$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$, τέτοιο, ώστε $x^*(x) = \|x\|$. Έστω, $P_n^* : X^* \to X^*$ με $P_n^*(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* \in Z$.
Επομένως,

$$(J(x))(P_n^*(x^*)) \coloneqq P_n^*(x^*(x)) = (x^* \circ P_n)(x) = x^*(P_n(x)) = x^*(x) = \|x\|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\|x\| = |(J(x))(P_n^*(x^*))| &\le \|J(x)\| \cdot \|P_n^*(x^*)\| \le \|J(x)\| \cdot \|P_n^*\| \cdot \|x^*\| \\ &= \|J(x)\| \cdot \|P_n\| \le K\|J(x)\|.\end{aligned}$$

Οπότε,

$$\|J(x)\| \ge \frac{1}{K}\|x\| \ , \text{ για κάθε } x \in \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Συνεπώς, J ισομορφική εμφύτευση του X στον Z^*.

(ii) Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συρρικνούσα, τότε $Z = X^*$. Οπότε, $Z^* = X^{**}$. Άρα, $J(x) = \tau(x)$, για κάθε $x \in X$.

(iii) Έστω ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης. Η $(J(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία διορθογωνίων συναρτησοειδών της $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ (η οποία είναι βάση Schauder του Z). Πραγματικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $z \in Z$, ισχύει:

$$(J(e_n))(z) \;=\; (J(e_n))\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (J(e_n))(e_i^*) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^*(e_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \delta_{i,n} = \alpha_n.$$

Έτσι, από την Πρόταση 1.2.4 συνάγουμε ότι η ακολουθία $(J(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική στον Z^* (δηλαδή, βάση Schauder του κλειστού υποχώρου που παράγει στον Z^*). Αρχικά θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής J είναι επί , δηλαδή για κάθε $z^* \in Z^*$, υπάρχει $x \in X$ με $J(x) = z^*$ και μετά ότι η ακολουθία $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ συρρικνούσα, δηλαδή $Z^* = \overline{\operatorname{span}}\{J(e_n) : n \in \mathbb{N}\}$.
Ας είναι $z \in Z$ και $z^* \in Z^*$. Τότε,

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} J(e_n)(z) e_n^*.$$

Οπότε,

$$z^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} J(e_n)(z) z^*(e_n^*) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^*(e_n^*) J(e_n)\right)(z)$$

Επομένως,

$$z^* = \sum_{n=1}^{\infty} z^*(e_n^*) J(e_n). \tag{1.12}$$

Έτσι, ο τελεστής J θα είναι επί, αν αποδείξουμε ότι $J(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^*(e_n^*) J(e_n)$, για κάποιο $x \in X$, δηλαδή, ότι $(z^*(e_n^*)) \in \Sigma$ (και έπειτα θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι η ακολουθία (e_n) είναι φραγμένα πλήρης). Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $z \in Z$, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\left(\sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*) J(e_i)\right)(z)\right| \;&=\; \left|\sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*) J(e_i)(z)\right| = \left|z^*\left(\sum_{i=1}^{n} J(e_i)(z) e_i^*\right)\right| \\ &\le\; \|z^*\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} J(e_i)(z) e_i^*\right\| := \|z^*\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{n} z(e_i) e_i^*\right\| \\ &=\; \|z^*\| \cdot \|P_n^*(z)\| \le K \cdot \|z^*\| \cdot \|z\|.\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*)J(e_i) \right\| \leq K \cdot \|z^*\|.$$

Οπότε, η ακολουθία $\left\{ \sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*)J(e_i) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη (από το $K \cdot \|z^*\| < +\infty$) . Εφόσον, η J είναι ισομορφική εμφύτευση,

$$\sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*)e_i = J^{-1}\left(J\left(\sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*)e_i \right) \right) = J^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*)J(e_i) \right)$$

Επομένως, για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} z^*(e_i^*)e_i \right\| \leq \|J^{-1}\| \cdot K \cdot \|z^*\| \overset{\text{(i)}}{\leq} K^2 \cdot \|z^*\|$$

Άρα, $z^*(e_i^*) \in \Sigma$.

Όμως, η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης, δηλαδή, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} z^*(e_n^*)e_n$.

Συνεπώς, υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$J(x) = J\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^*(e_n^*)e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} z^*(e_n^*)J(e_n) = z^*.$$

Άρα, ο τελεστής J είναι επί και αυτό σημαίνει ότι $X \cong Z^*$. Τέλος, είναι σαφές ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα, διότι

$$\overline{\text{span}}\{J(e_n) : n \in \mathbb{N}\} = J\left(\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = J(X) \overset{\text{επί}}{=} Z^*.$$

□

Πρόταση 1.3.8. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα βάση, τότε η Schauder βασική ακολουθία των διορθογωνίων συναρτησοειδών $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης.*

Απόδειξη. Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, με $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* \right\| < +\infty$ και θεωρούμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $x_n^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*, n \in \mathbb{N}$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή συγκλίνει στον X^*

Εφόσον, ο X έχει βάση Schauder, από την Πρόταση 1.1.3 είναι διαχωρίσιμος. $(*)$

Επίσης από το Θεώρημα Banach-Alaoglou-Bourbaki, η μοναδιαία μπάλα $(B_{X^*}, w*)$ είναι w^*- συμπαγής. $(**)$

Από τις $(*)$, $(**)$ παίρνουμε ότι $(B_{X^*}, w*)$ είναι w^*- συμπαγής και μετρικοποιήσιμη. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n}^*)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ w^*- συγκλίνουσα. Με άλλα λόγια, υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο, ώστε $x_{k_n}^* \overset{w^*}{\longrightarrow} x^*$. Εφόσον η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα, κάθε $x^* \in X^*$ γράφεται

μοναδικά ως $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n^*$, όπου $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Επίσης, είναι σαφές ότι $x^*(e_n) = \beta_n, \quad$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$.
Επιπλέον,

$$\lim_n x_n^*(e_m) = \lim_n \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* \right)(e_m) \right] = \alpha_m, \quad \text{για κάθε } m = 1, 2, \dots ,$$

και επειδή $x_{k_n}^* \xrightarrow{w^*} x^*$, προκύπτει ότι $x_{k_n}^*(e_m) \xrightarrow{m} x^*(e_m)$.
Επομένως,

$$x^*(e_m) = \alpha_m, \quad \text{για κάθε } m = 1, 2, \dots .$$

□

Είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα του R.C. James [11] που μας δίνει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη χαρακτηρισμού ενός χώρου Banach ως αυτοπαθή, συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω.

Θεώρημα 1.3.9 (R. C. James, 1950). *Έστω χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα και φραγμένα πλήρης, αν και μόνο αν ο X είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη.

Για το ικανό: Επειδή η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα από την Πρόταση 1.3.7 συνάγουμε ότι $Z^{**} = X^*$ και ο τελεστής J ταυτίζεται με την κανονική εμφύτευση τ. Επίσης, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης, και άρα από την Πρόταση 1.3.7 ο τελεστής J (δηλαδή, η κανονική εμφύτευση) είναι επί. Δηλαδή, $\tau(X) = X^{**}$.

Για το αναγκαίο: Έστω ότι ο χώρος X είναι αυτοπαθής με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συρρικνούσα, δηλαδή $Z := \overline{\text{span}}\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\} \neq X^*$. Τότε, από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $x^{**} \in X^{**} \setminus \{0\}$

$$x^{**}(f) = 0, \ \text{για κάθε } f \in Z. \tag{1.13}$$

Επειδή ο X αυτοπαθής, η κανονική εμφύτευση τ: $X \to X^{**}$ είναι επί.

Συγκεκριμένα, για τυχαίο $x^{**} \in X$, υπάρχει $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in X$ ώστε $\tau(x) = x^{**}$.

Οπότε,

$$(\tau(x))(x^*) := x^*(x) = x^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \right) = x^{**}(x^*).$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι για $x^* = e_n^*$, στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$e_n^* \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \right) := \alpha_n = x^{**}(e_n^*) \overset{(1.13)}{=} 0, \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots .$$

Άρα, $Z = X^*$.
Μένει να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης.
Ιδέα: Αν δείξουμε ότι ισχύει $\tau(e_n) = e_n^{**}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου τ η κανονική εμφύτευση, στη συνέχεια αρκεί αποδείξουμε ότι η $(e_n^{**})_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένα πλήρης. Οπότε, από την Πρόταση 1.3.8 αρκεί

να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα,
δηλαδή,

$$\overline{\text{span}}\{e_n^{**} : n \in \mathbb{N}\} = X^{**} \left(\Leftrightarrow \forall\ x^{**} \in X^{**}, \exists!\ (\beta_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x^{**} = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i^{**} \right).$$

Αρχίκα, $\tau(e_n) = e_n^{**}$. Πραγματικά, έστω $x \in X$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$(\tau(e_n))(x^*) := x^*(e_n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^*(e_n) \right) = \alpha_n.$$

Από την άλλη μεριά,

$$e_n^{**}(x^*) = e_n^{**} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^* \right) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_n^{**}(e_i^*) \right) = \alpha_n.$$

Έστω τυχαίο $x^{**} \in X^{**}$. Όντας ο χώρος X αυτοπαθής, επιλέγουμε ένα $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \in X$ τέτοιο, ώστε $x^{**} = \tau(x)$. Ουσιαστικά, θα αποδείξουμε ότι για $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i \in X$, ισχύει $\tau(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i^{**}$.
Έστω $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^* \in X^*$.
Είναι,

$$\begin{aligned}(\tau(x))(x^*) := x^*(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \beta_i \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j^{**} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i^* \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i^{**}(x^*).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\tau(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i^{**}.$$

□

1.4 Παραδείγματα χώρων Banach με βάσεις Schauder

Παραθέτουμε δίαφορα παραδείγματα χώρων Banach με βάσεις Schauder, για να γίνουν σαφέστερες οι διάφορες έννοιες που έχουν δοθεί ως τώρα.

(1) Οι χώροι $\ell_p,\ 1 \le p < +\infty$:

Θεωρούμε το χώρο $\ell_p := \left\{ x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < +\infty \right\}$, με $1 \le p < +\infty$ εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|\cdot\|_p$ η οποία ορίζεται ως $\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ και με την οποία ο ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ είναι χώρος Banach. Αν $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ με το 1 να βρίσκεται στην i-θέση, τότε για κάθε $x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, έχουμε

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_p = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n} 0.$$

διότι, εξ ορισμού του χώρου ℓ_p ισχύει $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < +\infty$.

Συνεπώς, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

Για τη μοναδικότητα των συντελεστών α_i υποθέτουμε ότι υπάρχουν συντελεστές β_i τέτοιοι, ώστε $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$. Οπότε, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i e_i = 0$, όπου $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots$.

Άρα,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i \right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\gamma_i|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{n} 0.$$

Επομένως, $\gamma_i = 0$, για κάθε $i = 1, 2, \dots$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) Αν $p = 1$, τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης και όχι συρρικνούσα βάση Schauder του ℓ_1. Πραγματικά, ας είναι τυχούσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_1 := \sup_n \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| < +\infty.$$

Οπότε, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_i|$ συγκλίνει, δηλαδή το $x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Συνεπώς, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ είναι συγκλίνουσα στον ℓ_1, και άρα η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης. Ωστόσο, ο δυϊκός χώρος του ℓ_1 είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_∞, ο οποίος δεν ειναι διαχωρίσιμος και κατά συνέπεια δεν διαθέτει βάση Schauder. Άρα, η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συρρικνούσα.

(ii) Αν $1 < p < +\infty$, τότε η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης και συρρικνούσα βάση Schauder του ℓ_p. Πραγματικά, χρησιμοποιώντας εντελώς ανάλογο επιχείρημα όπως αποδείξαμε στον ℓ_1 προκύπτει ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης. Τέλος, ο δυϊκός χώρος του ℓ_p είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_q, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Δηλαδή, υπάρχει ισομετρία $S \colon \ell_q \to \ell_p^*$ τέτοια, ώστε $(S(x))(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, για κάθε $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Οι εικόνες της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του ℓ_q, μέσω της S, είναι τα διορθογώνια συναρτησοειδή $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ της βάσης του ℓ_p. Από την άλλη, ο S είναι (ισομετρικός) ισομορφισμός μεταξύ των ℓ_q , ℓ_p^*, και άρα από την Πρόταση 1.1.2 η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα.

(2) Ο χώρος c_0 :

Θεωρούμε το χώρο $c_0 := \left\{ x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_n \alpha_n = 0 \right\}$ εφοδιασμένο με νόρμα $||\cdot||_\infty$, η οποία ορίζεται $||x||_\infty := \sup_n |\alpha_n|$, για κάθε $x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ και με την οποία ο c_0 είναι χώρος Banach. Αν $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, 0, \dots)$ με το 1 να βρίσκεται στην i-θέση, τότε για κάθε $x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$, έχουμε

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_\infty = \sup_{i>n} |\alpha_i| \xrightarrow{n} 0.$$

διότι, εξ ορισμού του χώρου c_0 ισχύει $\lim_n \alpha_n = 0$, και άρα $\lim_i \sup_{n>i} |\alpha_n| := \limsup |\alpha_n| = 0$.

Συνεπώς, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ και η μοναδικότητα προκύπτει άμεσα όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.
Επίσης, η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρικνούσα και όχι φραγμένα πλήρης βάση Schauder του c_0. Πραγματικά, ο δυϊκός χώρος του c_0 είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1, δηλαδή, υπάρχει ισομετρία $S\colon \ell_1 \to c_0^*$ τέτοια, ώστε $(S(x))(y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, για κάθε $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ και $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Οι εικόνες της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του ℓ_1, μέσω της S, είναι τα διορθογώνια συναρτησοειδή $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ της βάσης του c_0. Από την άλλη, ο S είναι (ισομετρικός) ισομορφισμός μεταξύ των ℓ_1 , c_0^*, και άρα η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα. Ωστόσο, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένα πλήρης, διότι αν ήταν, τότε για κάθε $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ με $\sup_n \left\| \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_\infty < +\infty$, θα υπήρχε $x \in c_0$ τέτοιο, ώστε $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Επιλέγοντας ως $\alpha_n = 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συνάγουμε ότι

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\|_\infty = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\|_\infty = 1,$$

Εντούτοις, δεν υπάρχει $x \in c_0$ τέτοιο, ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} e_n,$$

διότι, για το $x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισχύει $\alpha_n \xrightarrow{n} 0$, ενώ η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ δεν συγκλινει.

Δίνουμε τώρα μια ακόμα βάση Schauder για τον χώρο των μηδενικών ακολουθιών την οποία ονομάζουμε **αθροίζουσα βάση του** c_0.

Θέτω $x_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$ όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης βάση του c_0. Η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βάση Schauder του c_0. Πραγματικά, παρατηρούμε ότι

$$e_1 = x_1 \text{ και } e_n = x_n - x_{n-1}, \text{ για κάθε } n = 2, 3, \dots .$$

Έστω τώρα $y = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$. Τότε,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \;=\; \alpha_1 e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n e_n = \alpha_1 x_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n (x_n - x_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+1}) x_n.$$

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της προηγούμενης γραφής. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n x_n$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n e_n = 0$, όπου $\delta_n = \beta_n - \gamma_n$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$.
Έτσι,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i \right\|_\infty := \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \delta_k \right|, \left| \sum_{i=2}^{n} \delta_k \right|, \dots, |\delta_n| \right\} \xrightarrow{n} 0.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} &\lim_n \sum_{i=1}^{n} \delta_k = 0 \\ &\lim_n \sum_{i=2}^{n} \delta_k = 0 \\ &\dots \\ &\lim_n \delta_n = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, $\delta_n = 0$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$.

(3) Ο χώρος c :

Θεωρούμε το χώρο $c := \{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_n x_n = x\}$ εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ και με την οποία ο c είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου ℓ_∞, και άρα είναι χώρος Banach. Θεωρούμε την απεικόνιση $T\colon c \to c_0$ με τύπο

$$T(x) = T(x_1, x_2, \dots) := \left(\lim_n x_n, x_1 - \lim_n x_n, x_2 - \lim_n x_n, \dots\right),\ x \in c.$$

Η T είναι καλά ορισμένη γραμμική, 1-1 και επί του c_0. Επίσης, για τυχαίο $x \in c$, έχουμε

$$\|T(x)\|_\infty = \left\| \left(\lim_n x_n, x_1 - \lim_n x_n, x_2 - \lim_n x_n, \dots\right) \right\|_\infty \le 2\|x\|_\infty.$$

Οπότε, η απεικόνιση T είναι φραγμένη. Ομοίως, η $T^{-1}\colon c_0 \to c$ με τύπο

$$T^{-1}(x) = T^{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, \dots),\ x \in c_0$$

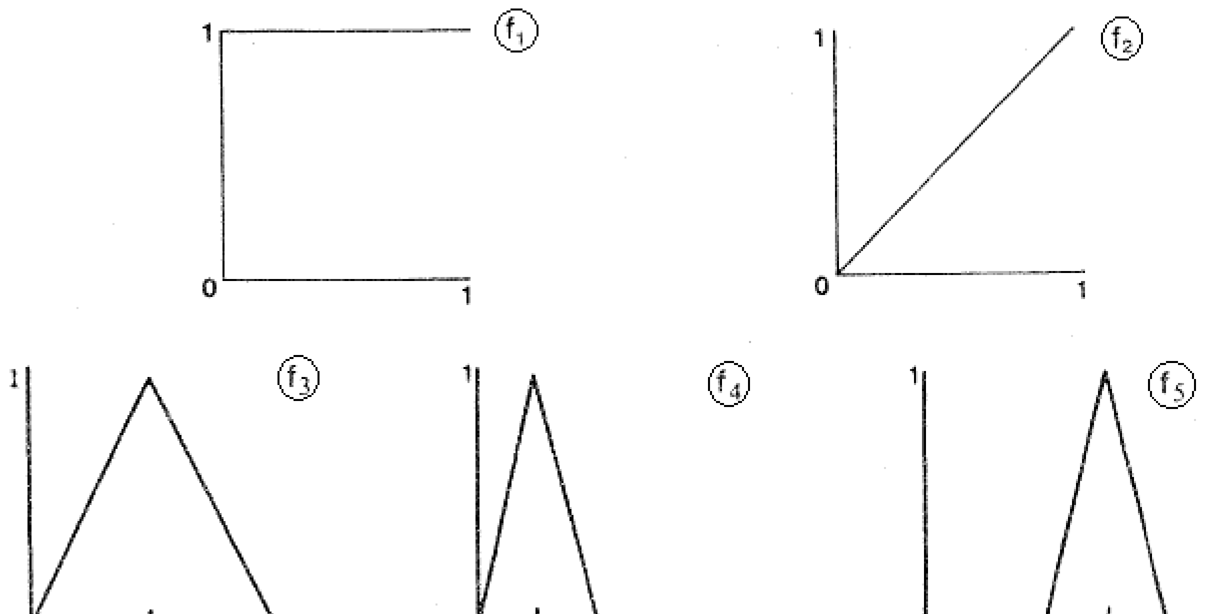
είναι φραγμένη με $\|T^{-1}\| \le 2$. Αυτό σημαίνει ότι η T είναι ισομορφισμός. Μάλιστα, οι εικόνα της συνήθους βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του c_0 μέσω της T^{-1} είναι η ακολουθία $e_0 = (1, 1, 1, \dots), e_1, e_2, \dots$ του c. Από την Πρόταση 1.1.2 η ακολουθία $(e_n)_{\mathbb{N}\cup\{0\}}$ είναι μια βάση του c. Με εντελώς ανάλογο τρόπο η εικόνα της αθροίζουσας βάσης του c_0 μέσω της απεικόνισης T^{-1} είναι η ακολουθία

$$x_n = (\overbrace{0, 0, \dots, 0}^{n-1}, 1, 1, \dots),\ n \in \mathbb{N}.$$

Από την Πρόταση 1.1.2 η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια βάση του c και θα την λέμε αθροίζουσα βάση του c.

(4) Ο χώρος $C[0,1]$:

Θεωρούμε το χώρο $C[0,1] := \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \,/\, f$ συνεχής$\}$ με νόρμα αυτού την απεικόνιση $\|\cdot\|_\infty$, τέτοια ώστε, $\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, για κάθε $f \in C[0,1]$, ο οποίος είναι χώρος Banach. Ο χώρος $C[0,1]$ είναι διαχωρίσιμος, και άρα έχει νόημα να μελετήσει κανείς την ύπαρξη βάσης Schauder. Πραγματικά, θέτουμε $\mathbb{P}$ τον χώρο όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές που ορίζονται στο $[0,1]$ και θεωρούμε την ακολουθία των μονωνύμων $P_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $x \in [0,1]$. Το σύνολο $P := \{P_0, P_1, \dots\}$ είναι αριθμήσιμο. Επίσης, είναι προφανές ότι το σύνολο P συνιστά μια βάση για τον χώρο $\mathbb{P}$, και άρα $\operatorname{span}(P) = \mathbb{P}$. Συγχρόνως, το Θεώρημα Προσέγγισης του Weierstrass δηλώνει ότι $\overline{\mathbb{P}} = C[0,1]$. Συνεπώς, το P είναι ολικό υποσύνολο του $C[0,1]$.
Στη συνέχεια, θεωρούμε $(t_j)_{i\in\mathbb{N}}$ την ακολουθία δυαδικων σημείων του διαστήματος $[0,1]$, δηλαδή την ακολουθία των πραγματικών αρθμών $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots$ και, ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ως εξής:
$f_1(t) = 1,\ t \in [0,1],\ f_2(t) = t,\ t \in [0,1]$ και για κάθε $n > 2, f_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t = t_1, t_2, \dots, t_{n-1} \\ 1 & , \quad t = t_n \end{cases}$
και f_n γραμμική σε κάθε υποδιάστημα του $[0,1]$ με άκρα από τα πρώτα n δυαδικά σημεία. Έτσι, γίνεται σαφές ότι για κάθε $n > 2$, υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί $m, r < n$, με $t_n \in (t_m, t_r)$ και $t_i \notin (t_m, t_r)$, $\forall i < n$ και τέτοιοι, ώστε $f_n(t) = 0$, $\forall t \notin (t_m, t_r)$, $f(t_n) = 1$ και f_n γραμμική στα διαστήματα (t_m, t_n) και (t_n, t_r) (βλ. σχήματα). Η ακολουθία αυτή ονομάζεται **σύστημα Faber-Schauder**.



Το σύστημα Faber-Schauder $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του χώρου $C[0,1]$.
Πραγματικά, θα αποδείξουμε ότι κάθε $g \in C[0,1]$ γράφεται μοναδικά ως $g = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$.
Υπό την προυπόθεση ότι ισχύει το συμπέρασμα θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$.
Για $x = 0:$ $g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(0) = \alpha_1 \underbrace{f_1(0)}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{f_2(0)}_{=0} + \cdots = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = g(0)$.

Για $x = 1: \ g(1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n(1) = \alpha_1 \underbrace{f_1(1)}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{f_2(1)}_{=1} + \underbrace{f_3(1)}_{=0} \cdots = \alpha_1 + \alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = g(1) - g(0).$
Συνεχίζοντας επαγωγικά προκύπτει ότι οι συντελεστές υπολογίζονται απο τον αναγωγικό τύπο:

$$\alpha_1 = g(0) \ \text{ και } \ \alpha_n = g(t_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f_i(t_n), \ n = 2, 3 \dots \ . \tag{1.14}$$

Έτσι, για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρχικά θέτουμε τους συντελεστές όπως στη σχέση (1.14). Έπειτα, ορίζουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $P_n := \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \ n = 2, 3, \dots$.

Ισχυρισμός. *Η P_n είναι πολυγωνική συνάρτηση της οποίας οι κορυφές βρίσκονται πάνω στο γράφημα της συνάρτησης g και έχουν αντίστοιχες τετμημένες τα πρώτα n δυαδικά σημεία.*

Πραγματικά, όταν $n = 2: \ P_2(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t), \ t \in [0, 1]$.

Ιδιαίτερα, για $t = 0: \ P_2(0) = \alpha_1 f_1(0) + \alpha_2 f_2(0) \Rightarrow P_2(0) = \alpha_1$
και για $t = 1: \ P_2(1) = \alpha_1 f_1(1) + \alpha_2 f_2(1) \Rightarrow P_2(1) = \alpha_1 + \alpha_2$.

Όταν $n = 3: \ P_3(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t), \ t \in [0, 1]$.

Ιδιαίτερα, για $t = 0: \ P_3(0) = \alpha_1 f_1(0) + \alpha_2 f_2(0) + \alpha_3 f_3(0) \Rightarrow P_3(0) = \alpha_1 = P_2(0)$
για $t = \frac{1}{2}: \ \alpha_1 f_1(\frac{1}{2}) + \alpha_2 f_2(\frac{1}{2}) + \alpha_3 f_3(\frac{1}{2}) \Rightarrow P_3(\frac{1}{2}) = \alpha_1 + \dfrac{\alpha_2}{2} + \alpha_3$
και για $t = 1: \ P_3(1) = \alpha_1 f_1(1) + \alpha_2 f_2(1) + \alpha_3 f_3(1) \Rightarrow P_3(1) = \alpha_1 + \alpha_2 = P_2(1)$.

Όταν $n = 4: \ P_4(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) + \alpha_4 f_4(t), \ t \in [0, 1]$

Ιδιαίτερα, για $t = 0: \ P_4(0) = \alpha_1 f_1(0) + \alpha_2 f_2(0) + \alpha_3 f_3(0) + \alpha_4 f_4(0) \Rightarrow \alpha_1 = P_3(0)$
για $t = \frac{1}{4}: \ P_4(\frac{1}{4}) = \alpha_1 f_1(\frac{1}{4}) + \alpha_2 f_2(\frac{1}{4}) + \alpha_3 f_3(\frac{1}{4}) + \alpha_4 f_4(\frac{1}{4}) \Rightarrow P_4(\frac{1}{4}) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_4$
για $t = \frac{1}{2}: \ P_4(\frac{1}{2}) = \alpha_1 f_1(\frac{1}{2}) + \alpha_2 f_2(\frac{1}{2}) + \alpha_3 f_3(\frac{1}{2}) + \alpha_4 f_4(\frac{1}{4}) \Rightarrow P_4(\frac{1}{2}) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \alpha_3 = P_3(\frac{1}{2})$
για $P_4(1) = \alpha_1 f_1(1) + \alpha_2 f_2(1) + \alpha_3 f_3(1) + \alpha_4 f_4(1) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = P_3(1)$.

Ας υποθέσουμε (προς εφαρμογή επαγωγής) ότι για $k > 4$ η P_k είναι πολυγωνική συνάρτηση με κορυφές στα πρώτα k δυαδικά σημεία $t_1, t_2, \dots t_k$.

Από τον ορισμό της ακολουθίας $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι σαφές ότι υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί αριθμοί $m, r < k + 1$ με $t_{k+1} \in (t_m, t_r)$ και $t_i \notin (t_m, t_r), \ \forall i = 1, 2, \dots, k$ και τέτοιοι ώστε $f_{k+1}(t) = 0, \ \forall t \notin (t_m, t_r)$, $f(t_{k+1}) = 1$ και f_n γραμμική στα διαστήματα (t_m, t_{k+1}) και (t_{k+1}, t_r). Από αυτό συνάγουμε ότι

$$P_{k+1}(t_i) = P_k(t_i) + \alpha_{k+1} f_{k+1}(t_i) = P_k(t_i)$$

και

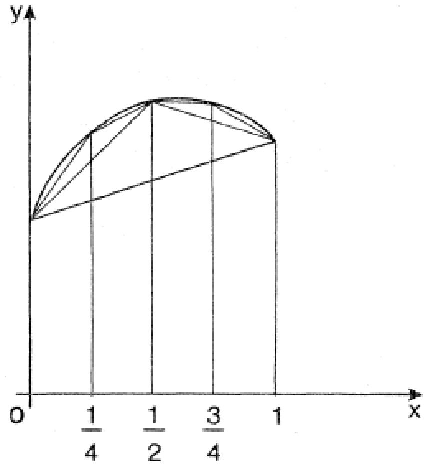
$$P_{k+1}(t_{k+1}) = P_k(t_{k+1}) + \alpha_{k+1} f_{k+1}(t_{k+1}) = P_k(t_{k+1}) + \alpha_{k+1} \neq P_k(t_{k+1})$$

Αυτό σημαίνει ότι η P_{k+1} είναι μία πολυγωνική συνάρτηση με $k + 1$ κορυφές πρώτα $k + 1$ δυαδικά σημεία.

Συνεπώς, η για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η P_n είναι πολυγωνική συνάρτηση με n κορυφές στα σημεία $t_1, t_2, \dots, t_n$. Επιπλέον, για κάθε $k = 1, 2, \dots n$, ισχύει:

$$\begin{aligned} P_n(t_k) &:= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(t_k) + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f_i(t_k) \\ &\overset{k<i}{=} \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f_i(t_k) + \alpha_k f_k(t_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f_i(t_k) + \alpha_k \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f_i(t_k) + g(t_k) - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i f_i(t_k) = g(t_k). \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι κορυφές της P_n βρίσκονται στο γράφημα της g και έχουν αντίστοιχες τετμημένες τα n πρώτα δυαδικά σημεία $t_1, t_2, \dots, t_n$.



Επειδή, το σύνολο $\{t_i : i = 1, 2, \dots\}$ είναι πυκνό στο $[0,1]$ και η g είναι ομοιόμορφα συνεχής (ούσα συνεχής σε συμπαγές σύνολο), προκύπτει ότι η ακολουθία P_n συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση g, δηλαδή,

$$\left\| g - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \right\|_\infty \xrightarrow{n} 0,$$

και άρα

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n.$$

Για τη μοναδικότητα των συντελεστών επιλέγουμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $g = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n f_n$.

Οπότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) f_n = 0.$$

Για κάθε $t \in \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \dots\}$,

αν $t = 0 :\ g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) f_n(0) = 0$ και επειδή $f_n(0) = 0,$ για κάθε $n \geq 2$, τότε

$$(\alpha_1 - \beta_1) f_1(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1,$$

αν $t=1:\ g(1)=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)f_n(1)=0$ και επειδή $f_n(1)=0,$ για κάθε $n\geq 3$, τότε

$$(\alpha_1-\beta_1)f_1(1)+(\alpha_2-\beta_n)f_2(1)=0\Rightarrow\alpha_2=\beta_2,$$

αν $t=\frac{1}{2}:\ g(\frac{1}{2})=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)f_n(\frac{1}{2})=0$ και επειδή $f_n(\frac{1}{2})=0,$ για κάθε $n\geq 4$, τότε

$$(\alpha_1-\beta_1)f_1(\frac{1}{2})+(\alpha_2-\beta_n)f_2(\frac{1}{2})+(\alpha_3-\beta_3)f_3(\frac{1}{2})=0\Rightarrow\alpha_3=\beta_3.$$

Επαγωγικά εύκολα προκύπτει ότι $\alpha_n=\beta_n,$ για κάθε $n=1,2,\dots$.
Συνεπώς, η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του χώρου $C[0,1]$ και μάλιστα μοναδιαία, αφού $\|f_n\|_\infty=1,$ για κάθε $n=1,2,\dots$

(5) Οι χώροι $L_p[0,1],\ 1\leq p<+\infty$:

Αρχικά ας θυμηθούμε πως ορίζεται ένας χώρος $L_p[0,1]$, για κάποιο p τέτοιο, ώστε $1\leq p<+\infty$ Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου, ορίζουμε το γραμμικό χώρο:

$$\mathscr{L}_p(\mu):=\{f\colon X\to\mathbb{R}\ \text{μετρήσιμη}\ /\ \|f\|_p<+\infty\},$$

και την απεικόνιση $\|\cdot\|_p\colon\mathscr{L}_p(\mu)\to\mathbb{R}$, με $\|f\|_p:=\left(\int|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, για κάθε $f\in\mathscr{L}_p(\mu), 1\leq p<+\infty$ η οποία ορίζει μία ημινόρμα στον $\mathscr{L}_p(\mu)$. Δηλαδή, η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

(i) $\|f\|_p\geq 0,$ για κάθε $f\in\mathscr{L}_p(\mu)$

(ii) $\|af\|_p=|a|\|f\|_p,$ για κάθε $a\in\mathbb{R}, f\in\mathscr{L}_p(\mu)$ και

(iii) $\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p,$ για κάθε $f,g\in\mathscr{L}_p(\mu)$

Ωστόσο, αν $\|f\|_p=0$, τότε $f=0$ μ-σ.π και όχι απαραίτητα $f=0$. Έτσι, για κάθε $f,g\in\mathscr{L}_p(\mu)$ ορίζουμε τη σχέση $\sim$ ως εξής :

$$f\sim g\iff f=g\ \text{μ-σ.π.}$$

Η σχέση $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στον $\mathscr{L}_p(\mu)$ και ονομάζεται **σχέση της σχεδόν παντού ισότητας**. Συμβολίζουμε με $L_p(\mu),\ 1\leq p<+\infty$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του $\mathscr{L}_p(\mu)$ ως προς τη σχέση $\sim$ και εξακολουθούμε να γράφουμε τα στοιχεία του ως συναρτήσεις. Για παράδειγμα γράφοντας $f=g$ στον $L_p(\mu)$ εννοούμε ότι $f=g$ μ-σ.π. Επίσης, για κάθε $a,b\in\mathbb{R}$ με $a\leq b$, $L_p[a,b]$ είναι ο χώρος $L_p(\lambda)$ όπου λ το μέτρο Lebesgue στο διάστημα $[a,b]$. Παρατηρούμε ότι ο $L_p(\mu)$ είναι γραμμικός, διότι για κάθε $f_1,f_2,g_1,g_2\in L_p(\mu)$ και $c\in\mathbb{R}$ αν $f_1\sim f_2$ και $g_1\sim g_2$, τότε $f_1+g_1\sim f_2+g_2$ και $cg_1\sim cg_2$. Επιπλέον, η απεικόνιση $\|\cdot\|_p\colon L_p(\mu)\to\mathbb{R}$ είναι καλώς ορισμένη, αφού αν $f\sim g$, τότε $\|f\|_p=\|g\|_p$. Οπότε, η $\|f\|_p$ ανεξάρτητη των αντιπροσώπων. Τέλος, $\|f\|_p=0\iff f=0$ και άρα, η $\|\cdot\|_p$ νόρμα στον $L_p(\mu)$. Αποδεικνύεται ότι ο $(L_p(\mu),\|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach (Θεώρημα Riesz-Fischer).

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο χώρο $L_p[0,1]$ ως εξής:

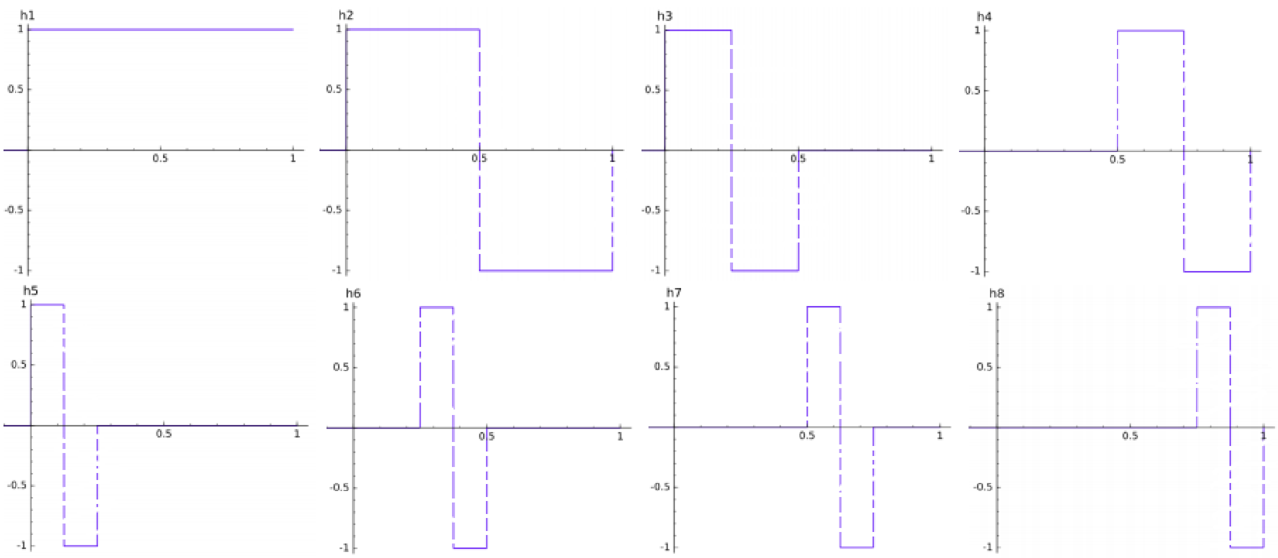
$$h_1(t)=\begin{cases}1 & , & t\in[0,1)\\ 0 & , & t=1\end{cases}$$

και για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$ και $l = 1, 2, \dots, 2^k$:

$$h_{2^k+l}(t) = \begin{cases} 1 & , \quad \dfrac{2l-2}{2^{k+1}} \le t < \dfrac{2l-1}{2^{k+1}} \\ -1 & , \quad \dfrac{2l-1}{2^{k+1}} \le t \le \dfrac{2l}{2^{k+1}} \\ 0 & , \quad \text{αλλού} \end{cases}$$

Η παραπάνω ακολουθία συναρτήσεων ονομάζεται **σύστημα Haar**.

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι πρώτοι 8 όροι του συστήματος Haar.



Το σύστημα Haar $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι (μονότονη) βάση Schauder του χώρου $L_p[0,1]$.
Πραγματικά, είναι προφανές ότι η ακολουθία $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι μοναδιαία και επίσης $h_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια θέτουμε $H = \text{span}\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ και θα αποδείξουμε ότι $\overline{H}^{L_p} = L_p[0,1]$. Θεωρώντας ως δεδομένο ότι το σύνολο των χρακτηριστικών των δυαδικών διαστημάτων είναι ολικό στον $L_p[0,1]$ και εφόσον ο χώρος H περιέχει τις χαρακτηριστικές των δυαδικών διαστημάτων (για παράδειγμα $\mathcal{X}_{[0,1)} = h_1 \in H,\ \mathcal{X}_{[0,\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \in H,\ \mathcal{X}_{[\frac{1}{2},1]} = \frac{1}{2}(h_1 - h_2) \in H$, κλπ) συνάγουμε ότι $\overline{H}^{L_p} = L_p[0,1]$. Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και n φυσικός έτσι, ώστε $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i$ και $g = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i h_i$ και θα αποδείξουμε ότι $\|f\|_p \le \|g\|_p$. Είναι σαφές ότι η μόνη διαφορά που έχουν οι συναρτήσεις f και g, από τον τρόπο που ορίστηκαν, είναι ότι σε κάποιο δυαδικό διάστημα I στο οποίο η f είναι σταθερή (γιατί οι $h_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι σταθερές) και ίση με b, έχουμε ότι η g ισούται με $b + a_{n+1}$ στο πρώτο μισό του I και με $b - a_{n+1}$ στο δεύτερο μισό του I.

Ισχυρισμός. *Ισχύει* $2|b|^p \le |b + a_{n+1}|^p + |b - a_{n+1}|^p,\ 1 \le p < +\infty$

Πραγματικά, από την κυρτότητα της συνάρτησης $h(x) = |x|^p,\ 1 \le p < +\infty$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \le \frac{|x|^p + |y|^p}{2}.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x+y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p).$$

Θέτοντας όπου x το $b+a$ και y το $b-a$ παίρνουμε το ζητούμενο.
Έτσι,

$$\begin{aligned}
\int |g|^p d\lambda &= \int_{[0,1]\setminus I} |g|^p d\lambda + \int_I |g|^p d\lambda = \int_{[0,1]\setminus I} |f|^p d\lambda + |b+a_{n+1}|^p \frac{\lambda(I)}{2} + |b-a_{n+1}|^p \frac{\lambda(I)}{2} \\
&\geq \int_{[0,1]\setminus I} |f|^p d\lambda + \frac{\lambda(I)}{2}(2|b|^p) = \int_{[0,1]\setminus I} |f|^p d\lambda + \lambda(I)|b|^p = \int_{[0,1]\setminus I} |f|^p d\lambda + \int_I |f|^p d\lambda \\
&= \int |f|^p d\lambda.
\end{aligned}$$

Επομένως, $\|f\|_p \leq \|g\|_p$, και άρα από το Θεώρημα 1.1.9 το σύστημα Haar αποτελεί μονότονη βάση Schauder του χώρου $L_p[0,1]$.

Παρατήρηση 1.4.1. *Το σύστημα Faber-Schauder μπορεί να δοθεί και ως* $f_1(t) = 1,\ t \in [0,1]$ *και* $f_n(t) = \int_0^t h_{n-1}(u)du, n > 1$, $t \in [0,1]$, *όπου* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *το σύστημα Haar.*

1.5 Ύπαρξη Schauder βασικής ακολουθίας

Το γεγονός ότι στους κλασικούς διαχωρίσιμους χώρους Banach (βλ. προηγούμενα παραδείγματα) υπάρχει τουλάχιστον μία βάση Schauder, οδήγησε τον Banach να θέσει το ερώτημα ύπαρξης βάσης Schauder σε διαχωρίσιμους χώρους. Το πρόβλημα αυτό (γνωστό και ως πρόβλημα της βάσης) παρέμεινε άλυτο για αρκετά χρόνια και όπως έχουμε αναφέρει απαντήθηκε αρνητικά από τον P. Enflo [5]. Εντούτοις, το ερώτημα αν κάθε (απειροδιάστατος) χώρος Banach έχει Schauder βασική ακολουθία, έχει θετική απάντηση, οφείλεται στον S. Mazur και βασίζεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.5.1. *Ας είναι* X *χώρος Banach και* Y *πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του* X. *Για κάθε* $\varepsilon > 0$, *υπάρχει* $x \in X$ *με* $\|x\| = 1$ *τέτοιο, ώστε* $\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$, *για κάθε* $y \in Y$ *και* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$.
Επίσης, το σύνολο $S_Y = \{y \in Y : \|y\| = 1\}$ ως κλειστό σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, είναι συμπαγές υποσύνολο του Y, και άρα ολικά φραγμένο.
Επομένως,

$$S_Y \subset \bigcup_{k=1}^{n} S\left(y_k, \frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ για κάποια } y_1, \ldots, y_n \in S_Y.$$

Δηλαδή, για κάθε $y \in S_Y$, υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ώστε $\|y - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Με βάση το Θεώρημα Hahn Banach επιλέγουμε $y_k^* \in S_{X^*}$, με $y_k^*(y_k) = \|y_k\| = 1,$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots n$. Θεωρώντας την απεικόνιση $T\colon X \to \mathbb{R}^n$ με $T(x) = (y_1^*(x), \ldots, y_n^*(x)),\ x \in X$ έπεται ότι $\ker T := \bigcap_{k=1}^{n} \ker y_k^*$ έχει συνδιάσταση μέσα στον X το πολύ n, και αφού ο X απειροδιάστατος τοτε $\bigcap_{k=1}^{n} \ker y_k^*$ είναι επίσης απειροδιάστατος υπόχωρος του X. Έτσι, επιλέγουμε ένα $x \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker y_k^*$ με $\|x\| = 1$,

δηλαδή, $y_k^*(x) = 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$. Ας είναι, τώρα $y \in S_Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει ένα $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ τέτοιο, ώστε $\|y - y_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Είναι,

$$\begin{aligned}\|y + \lambda x\| &\geq \|y_k + \lambda x\| - \|y - y_k\| \geq y_k^*(y_k + \lambda x) - \|y - y_k\| > y_k^*(y_k + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= y_k^*(y_k) + \lambda y_k^*(x) - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Οπότε, $\|y\| = 1 \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$, για κάθε $y \in S_Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Το συμπέρασμα αυτό γενικεύεται για κάθε $y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Πραγματικά, αν $y = 0$ τότε είναι σαφές ότι το συμπέρασμα ισχύει. Αν $y \in Y$ με $y \neq 0$ τότε $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$, και άρα από τα πραραπάνω για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\frac{y}{\|y\|} + \frac{\lambda}{\|y\|}x\right\|.$$

Επομένως,

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|.$$

□

Με επαναληπτική εφαρμογή του παραπάνω λήμματος αποδεικνύεται το παρακάτω θεμελιώδες αποτέλεσμα που οφείλεται στον Mazur.

Θεώρημα 1.5.2 (Mazur). *Ας είναι χώρος Banach X και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X με σταθερά βάσης μικρότερη ή ίση του $1 + \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_n) \leq 1 + \varepsilon$. Θα κατασκευάσουμε με επαγωγικό τρόπο την ζητούμενη μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X. Αρχικά, επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $e_1 \in S_X$ και θέτουμε $F_1 := \text{span}\{e_1\}$ (κλειστός υπόχωρος του X διάστασης 1), τότε από το Λήμμα 1.5.1, υπάρχει $e_2 \in S_X$, τέτοιο ώστε, $\|\lambda_1 e_1\| \leq (1+\varepsilon_2)\|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\|$, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Έπειτα, θέτουμε $F_2 := \text{span}\{e_1, e_2\}$ (κλειστός υπόχωρος διάστασης 2), τότε από το Λήμμα 1.5.1, υπάρχει $e_3 \in S_X$, τέτοιο ώστε, $\|\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2\| \leq (1+\varepsilon_3)\|(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) + \lambda_3 e_3\|$, για κάθε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Επαγωγικά, ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει $e_1, e_2, \ldots, e_n \in S_X$ και για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right\| \leq (1+\varepsilon_{k+1})\left\|\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i\right\|.$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τον $F_n := \text{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ (κλειστό) πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του X. Τότε, από το Λήμμα 1.5.1, επιλέγουμε $e_{n+1} \in S_X$ τέτοιο, ώστε

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_{n+1})\,\|y + \lambda_{n+1}e_{n+1}\|\,, \quad \text{για κάθε } y \in F_n \text{ και } \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}\,.$$

Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Είναι σαφές ότι $e_n \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, ας είναι $n \leq m$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F_n$, έχουμε

$$\|y_k\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\| \leq \prod_{i=n+1}^{m}(1+\varepsilon_n)\left\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i\right\|.$$

□

1.6 Block βάσεις και ισοδύναμες βάσεις

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να οικοδομήσουμε μεθόδους που να μας παράγουν βάσεις Schauder (ή Schauder βασικές ακολουθίες), δοθείσας μίας βάσης Schauder ενός χώρου Banach.

Ορισμός 1.6.1. *Έστω X ένας χώρος Banach με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X με $x_n \neq 0$ για $n = 1, 2, \ldots$ ονομάζεται* **block βάση** *της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αν υπάρχουν $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών (με το μηδέν) ώστε*

$$x_n = \sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_k e_k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, ο χώρος $Y := \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται ***block υπόχωρος*** *του X.*

Για παράδειγμα, στον χώρο c_0 αν είναι $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης μοναδιαία βάση αυτού, τότε η ακολουθία $x_n = e_{3n} + e_{3n-1} + e_{3n-2}, n \in \mathbb{N}$ είναι μία block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Παρατήρηση 1.6.2. *Κάθε block βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μιας βάσης Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ενός χώρου Banach X, είναι Schauder βασική ακολουθία με σταθερά βάσης μικρότερη ή ίση της σταθεράς βάσης της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Πραγματικά, από το Θεώρημα 1.1.9 για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \geq n$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} \alpha_j e_j\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} \alpha_i \alpha_j e_j\right\| \\ &\leq bc\{e_n\} \left\|\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} \alpha_i \alpha_j e_j\right\| = bc\{e_n\} \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right\|. \end{aligned}$$

Άρα, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική. Όμως, γνωρίζουμε ότι η $bc\{x_n\}$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα και αυτό σημαίνει οτι $bc\{x_n\} \leq bc\{e_n\}$.

Ορισμός 1.6.3. *Ας είναι ένας χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Μια block βάση $x_n = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_i e_i,\ n = 1, 2, \ldots$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται* ***block βάση με σταθερούς συντελεστές****, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $c_n \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $a_i = c_n$ ή $a_i = 0$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ώστε $p_n + 1 \leq i \leq p_{n+1}$. Δηλαδή, $x_n = c_n \sum_{i\in\sigma_n} e_i$, όπου $\sigma_n \subset \mathbb{N}$ και $\sigma_n \subset (p_n, p_{n+1}]$.*

Ορισμός 1.6.4. *Ας είναι οι χώροι Banach X και Y με βάσεις Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αντίστοιχα. Οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγονται* ***ισοδύναμες****, αν για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ συγκλίνει. Δηλαδή,*

$$\left\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\} = \left\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n\right\}.$$

Για παράδειγμα, αν $X = \ell_1$ και $Y = \ell_2$, τότε οι ακολουθίες $x_n = y_n = e_n$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης μοναδιαία βάση του ℓ_1 και ℓ_2, δεν είναι ισοδύναμες, διότι η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ συγκλίνει στον ℓ_2, αλλά όχι στον ℓ_1.

Πρόταση 1.6.5. *Ας είναι μια Schauder βασική ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach X και μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο Banach Y. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική και ισοδύναμη ακολουθία με την $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

(ii) *Υπάρχει ισομορφισμός $T\colon \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \to \overline{\operatorname{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιος, ώστε*

$$T(x_n) = y_n\ ,\ \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots$$

(iii) *Υπάρχουν θετικές σταθερές C_1, C_2 τέτοιες, ώστε για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, να ισχύει:*

$$\frac{1}{C_1}\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|_X \le \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right\|_Y \le C_2 \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|_X .$$

(Όταν $C_1 = C_2 = 1$, οι $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγονται ***ισομετρικά ισοδύναμες****.)*

Απόδειξη.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right\|_Y \overset{\text{(ii)}}{=} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i)\right\|_Y = \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right\|_Y \le \|T\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|_X .$$

και

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|_X \overset{\text{(ii)}}{=} \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T^{-1}(y_i)\right\|_X = \left\|T^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)\right\|_X \le \|T^{-1}\| \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right\|_Y .$$

Συνεπώς, για $C_1 := \|T^{-1}\|$ και $C_2 := \|T\|$ παίρνουμε το ζητούμενο.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Για κάθε $n < m$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, από την Πρόταση 1.1.9 έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right\|_Y \overset{\text{(iii)}}{\le} C_2 \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right\|_X \le C_2 bc\{x_i\} \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right\|_X \overset{\text{(iii)}}{\le} C_2 C_1 bc\{x_i\} \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i\right\|_Y .$$

Επομένως, η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Schauder βασική ακολουθία και μάλιστα, από την υπόθεση (iii)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει } \iff \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ συγκλίνει.}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Θέτουμε $X_1 := \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, Y_1 := \overline{\operatorname{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ και ορίζουμε την απεικόνιση T μεταξύ των χώρων Banach X_1, Y_1 (ως κλειστοί υπόχωροι των X, Y χώρων Banach) ως εξής:

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n,\ x \in X_1.$$

Η T είναι καλά ορισμένη και γραμμική απεικόνιση. Επίσης, για τυχαίο $x \in X_1$, αν $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n = 0$, τότε $\alpha_n = 0$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Οπότε, $x = 0$, δηλαδή, η T είναι 1-1. Επίσης, για κάθε $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n \in Y_1$, επιλέγοντας ως $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X_1$ προκύπτει ότι $y = T(x)$, δηλαδή, η T είναι επί. Μένει να αποδείξουμε ότι η T είναι συνεχής και τότε από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης θα έχουμε ότι T ισομορφισμός. Σύμφωνα με το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος αρκεί να αποδείξουμε ότι η T έχει κλειστό γράφημα. Έστω ακολουθία $(z_m, T(z_m))_{m\in\mathbb{N}}$ στο χώρο $X_1 \times Y_1$ και ας είναι $z = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \in X_1$ και $y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n \in Y_1$ τέτοια, ώστε $z_m \xrightarrow{m} z$ και $T(z_m) \xrightarrow{m} y$. Θα δείξουμε ότι $y = T(z)$. Εφόσον $z_m \in X_1$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε

$$z_m = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} x_n, \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

Από τη συνέχεια των διορθογωνίων συναρτησοειδών $x_n^* \colon X_1 \to \mathbb{R}$ συνάγουμε ότι

$$\alpha_{m,n} \xrightarrow{m} \alpha_n, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots . \tag{1.15}$$

και εφόσον

$$T(z_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} y_n \xrightarrow{m} y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n,$$

ξανά από τη συνέχεια των διορθογωνίων συναρτησοειδών, έχουμε

$$\alpha_{m,n} \xrightarrow{m} \beta_n, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots . \tag{1.16}$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου στους πραγματικούς και τις σχέσεις (1.15), (1.16) συνάγουμε ότι $\beta_n = \alpha_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Συνεπώς,

$$T(z_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m,n} y_n \xrightarrow{m} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n = T(z).$$

Συνεπώς $y = T(z)$. □

Παρατήρηση 1.6.6. *Εστω χώρος Banach X με μοναδιαία βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Είναι αληθές ότι κάθε άλλη μοναδιαία βάση του X, είναι ισοδύναμη της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$; Οι A. Pelczynski και I. Singer [20], απέδειξαν ότι υπάρχουν άπειρες μη ισοδύναμες μοναδιαίες βάσεις Schauder του X.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα γνωστό και ως «αρχή των μικρών διαταραχών» (Principle of small perturbations), αποδείχθηκε αρχικά από τους Krein και Lusternick για μια συγκεκριμένη κλάση χώρων Banach το 1947 και γενικεύτηκε από τους C. Bessaga και A. Pelczynski [2] το 1958. Αυτό χονδρικά δηλώνει ότι αν «διαταράξουμε» ελαφρώς δοθήσα βάση Schauder σε έναν χώρο Banach, τότε παράγουμε μία νέα βάση Schauder του εν λόγω χώρου και μάλιστα ισοδύναμη της αρχικής.

Θεώρημα 1.6.7. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία έχει σταθερά βάσης K. Υποθέτουμε ότι $M := \inf_n \|e_n\| > 0$ και έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον X τέτοια, ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|e_n - x_n\| < \frac{M}{2K}.$$

Τότε, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης βάση Schauder και μάλιστα ισοδύναμη με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 1.6.7 είναι χρήσιμο το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.6.8. *Ας είναι χώρος Banach X και ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $T\colon X \to X$, τέτοιος, ώστε $\|T-I\| < 1$, όπου $I\colon X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής. Τότε, ο T είναι αυτομορφισμός (επί του X).*

Απόδειξη. Έστω $0 < \varepsilon < 1$, θέτουμε $\|I-T\| = \varepsilon$ και έστω $x \in X$

$$\|T(x)\| - \|x\| \leq \|x - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Επομένως,

$$\|T(x)\| \leq (1+\varepsilon)\|x\| \tag{1.17}$$

Επίσης, για κάθε $x \in X$,

$$\|x\| - \|T(x)\| \leq \|x - T(x)\| \leq \varepsilon \|x\|.$$

Επομένως,

$$(1-\varepsilon)\|x\| \leq \|T(x)\| \tag{1.18}$$

Από τις σχέσεις (1.17) και (1.18) έπεται ότι T ισομορφική εμφύτευση. Μένει να αποδείξουμε ότι ο T είναι επί του X. Για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, θέτουμε την ακολουθία $S_n = I + (I-T) + \cdots + (I-T)^n$, όπου $(I-T)^n := \underbrace{(I-T) \circ \cdots \circ (I-T)}_{n \text{ φορές}}$. Προφανώς, $S_n \in \mathcal{B}(X)$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ως άθροισμα φραγμένων γραμμικών τελεστών.

Ισχυρισμός 1. *Η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον χώρο Banach $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$.*

Πραγματικά, για κάθε $n < m$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} (I-T)^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{m} \|I-T\|^i = \sum_{i=n+1}^{m} \varepsilon^i \\ &= \varepsilon^{n+1} \cdot \frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon} = \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^{m+1}}{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

και επειδή το $\lim_n \varepsilon^n = 0$, η ακολουθία $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Εφόσον ο $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach, η $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλινουσα στον $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$, δηλαδή, υπάρχει $S \in \mathcal{B}(X)$ και $S_n \xrightarrow{n} S$.

Ισχυρισμός 2. *$S \circ T = T \circ S = I$.*

Πραγματικά, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_n (S_n \circ T) = \lim_n (T \circ S_n) = I$.
Επαγωγικά, θα αποδείξουμε ότι $S_n \circ T = I - (I-T)^{n+1}, n = 1, 2, \ldots$ και ανάλογα αποδεικνύεται ο άλλος εγκλεισμός.
Για $n = 1$:

$$\begin{aligned} S_1 \circ T &:= (I + (I-T)) \circ T = I \circ T + (I-T) \circ T = T + T - T^2 \\ &= 2T - T^2 = -I + 2T - T^2 + I = I - (I-T)^2. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι $S_k \circ T = I - (I-T)^{k+1}$ αληθής και θα αποδείξουμε ότι $S_{k+1} \circ T = I - (I-T)^{k+2}$ αληθής. Πραγματικά,

$$\begin{aligned} S_{k+1} \circ T &:= \left(\sum_{i=0}^{k+1} (I-T)^i \right) \circ T = (S_k + (I-T)^{k+1}) \circ T = S_k \circ T + (I-T)^{k+1} \circ T \\ &= I - (I-T)^{k+1} + (I-T)^{k+1} \circ T = I - (I-T)^{k+1} \circ (I-T) = I - (I-T)^{k+2}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|S_n \circ T - I\| = \|(I-T)^{n+1}\| \leq \|I-T\|^{n+1} = \varepsilon^{n+1} \xrightarrow{n} 0.$$

Άρα, $S_n \circ T \xrightarrow{n} I$. □

Απόδειξη Θεωρήματος 1.6.7. Αρχικά, θέτουμε $\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - e_n\| \frac{2K}{M}$ και από την υπόθεση έχουμε ότι $\theta < 1$. Ας είναι $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$. Αρχικά, όντας ο X χώρος Banach θα αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x_n - e_n)$ είναι απολύτως συγκλίνουσα στον X. Από την Πρόταση 1.2.3 και την υπόθεση, ισχύει:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n(x_n - e_n)\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \|x_n - e_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n^*(x)| \|x_n - e_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n^*\| \|x_n - e_n\| \|x\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K}{\|e_n\|} \|x_n - e_n\| \|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K}{M} \|x_n - e_n\| \|x\| = \frac{2K}{M} \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - e_n\| \\
&\leq \theta \|x\|.
\end{aligned}$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x_n - e_n)$ είναι συγκλινουσα στον X και εφόσον η σειρά $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ συγκλίνει στον X, τότε και η σειρά $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ συγκλινει στον X.

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $T\colon X \to X$ με τύπο $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ είναι καλά ορισμένη και προφανώς γραμμική. Επίσης, για $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$ ισχύει:

$$\|x - Tx\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x_n - e_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\alpha_n(x_n - e_n)\| \leq \theta \|x\|.$$

Οπότε, $\|I - T\| \leq \theta < 1$, και άρα από το Λήμμα 1.6.8 ο τελεστής T είναι ισομορφισμός. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.1.2 και την Πρόταση 1.6.5 έχουμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμη βάση Schauder με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα συνήθως είναι χρήσιμο όταν μελετούμε υποχώρους ενός χώρου Banach.

Πρόταση 1.6.9. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση Schauder $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν ο Y είναι είναι κλειστός απειροδιάστατος υπόχωρος του X, τότε υπάρχει (κλειστός) υπόχωρος W του Y, ο οποίος έχει βάση Schauder ισοδύναμη με μια block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά μία ακολουθία στον Y και μία block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ισοδύναμες μεταξύ τους βασιζόμενοι στον ακόλουθο ισχυρισμό. Έστω K η σταθερά της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$, *υπάρχει* $y \in S_Y$ *και* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε* $y = \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i e_i$.

Πραγματικά, έστω $n \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε την προβολή $P_n\big|_Y : Y \to \operatorname{span}\{e_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ όπου

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Αν P_n 1-1, τότε ο Y θα εμφυτεύονταν στον $\operatorname{span}\{e_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ πράγμα αδύνατο, διότι ο Y απειροδιάστατος. Συνεπώς, $\ker P_n \neq \{0\}$, και άρα υπάρχει $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in S_Y$ τέτοιο, ώστε

$$P_n(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0.$$

Ας ξεκινήσουμε τώρα την επαγωγική κατασκευή των δύο ακολουθιών. Έστω $y_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,1} e_i$ στοιχείο του Y με $\|y_1\| = 1$. Τότε, υπάρχει $m_1 \in \mathbb{N}$, ώστε $\left\|\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{i,1} e_i - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,1} e_i\right\| < \frac{1}{4K}$. Θέτοντας $x_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{i,1} e_i$, ισοδύναμα έχουμε $\|x_1 - y_1\| < \frac{1}{4K}$. Από τον παραπάνω ισχυρισμό για $n = m_1$, επιλέγουμε ένα $y_2 = \sum_{i=m_1+1}^{\infty} \alpha_{i,2} e_i$ στοιχείο του Y, με $\|y_2\| = 1$. Τότε, υπάρχει $m_2 > m_1$, ώστε $\left\|\sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_{i,2} e_i - \sum_{i=m_1+1}^{\infty} \alpha_{i,2} e_i\right\| < \frac{1}{4^2 K}$. Θέτοντας $x_2 = \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_{i,2} e_i$, ισοδύναμα έχουμε $\|x_2 - y_2\| < \frac{1}{4^2 K}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε μια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (κατά συνέπεια $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauder βασική ακολουθία) και μια $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία του Y τέτοιες, ώστε $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{4^n K}$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ και $1 - \frac{1}{4K} < \|x_n\|$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.
Οπότε, $M := \inf_n \|x_n\| > 1 - \frac{1}{4K}$.
Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n K} = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{3K} < \frac{M}{2K}.$$

Άρα, από το Θεώρημα 1.6.7 έπεται ότι η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauder βασική ακολουθία στον Y ισοδύναμη με την block ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θέτοντας, τον $W := \overline{\operatorname{span}}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ υπόχωρο του Y, έπεται ότι η ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του W. □

Σχόλιο. *Η παραπάνω αποδεικτική τεχνική είναι αρκετά χρήσιμη και φέρει το όνομα «Sliding hump argument».*

Το παρακάτω θεώρημα οφείλεται στους Bessaga και Pelzynski [2] και συναντάται συχνά ως «Αρχή της επιλογής» (Principle of choice) και η απόδειξή του γίνεται μέσω του Sliding hump argument.

Θεώρημα 1.6.10. *Ας είναι χώρος Banach X, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βάση Schauder του X και $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ τα αντίστοιχα διορθογώνια συναρτησοειδή αυτής. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στον X η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

(i) $\limsup_n \|x_n\| > 0$

(ii) $\lim_n e_i^*(x_n) = 0,$ *για κάθε* $i = 1, 2, \dots,$

τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει Schauder βασική υπακολουθία ισοδύναμη με κάποια block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση (i) μπορούμε αντικαθιστώντας την $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με κατάλληλη υπακολουθία της να υποθέσουμε ότι $\inf\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} = \varepsilon > 0$. Επίσης, θέτουμε K τη σταθερά της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $d = \dfrac{\varepsilon}{2^3 \cdot K}$. Θα κατασκευάσουμε επαγωγικά δύο γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και μια block $z_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \alpha_i e_i$ έτσι, ώστε οι $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ να ικανοποιούν $\|z_j - x_{k_j}\| < \dfrac{d}{2^j}$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $p_1 = 0$ και $k_1 = 1$. Εφόσον $x_1 = \sum_{i=1}^{\infty} e_i^*(x_1)e_i$, υπάρχει $p_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε $\left\|\sum_{i=p_2+1}^{\infty} e_n^*(x_{k_1})e_n\right\| < \dfrac{d}{2}$, και θέτουμε $z_1 = \sum_{i=1}^{p_2} e_i^*(x_{k_1})e_i = \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i e_i$. Έτσι, έχουμε $\|z_1 - x_{k_1}\| < \dfrac{d}{2}$ και αυτό συμπληρώνει το πρώτο επαγωγικό βήμα.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουν οριστεί $z_1, \dots, z_{j-1}$ και $k_1 < \dots < k_{j-1}$ ώστε $\|z_i - x_{k_i}\| < \dfrac{d}{2^i}$, για $i = 1, \dots, j-1$. Έστω $z_{j-1} = \sum_{i=p_{j-1}+1}^{p_j} \alpha_i e_i$. Από την υπόθεση (ii) μπορούμε να επιλέξουμε $k_j > k_{j-1}$ ώστε $\|P_{p_j}(x_{k_j})\| < \dfrac{d}{2^{j+1}}$ και από την υπόθεση (i) να επιλέξουμε ένα $p_{j+1} > p_j$ ώστε $\left\|\sum_{i=p_{j+1}+1}^{\infty} e_i^*(x_{k_j})e_i\right\| < \dfrac{d}{2^{j+1}}$. Θέτουμε $z_j := \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} e_n^*(x_{k_j})e_n$.
Είναι,

$$x_{k_j} = \sum_{i=1}^{p_j} e_i^*(x_{k_j})e_i + z_j + \sum_{i=p_{j+1}+1}^{\infty} e_i^*(x_{k_j})e_i$$

και έτσι $\|z_j - x_{k_j}\| < \dfrac{d}{2^{j+1}} + \dfrac{d}{2^{j+1}} = \dfrac{d}{2^j}$.
Επιπλέον, $\|z_j\| \geq \|x_{k_j}\| - \left\|z_j - x_{k_j}\right\| > \varepsilon - \dfrac{d}{2^j} > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Θέτοντας, $M := \inf_j \|z_j\|$, έχουμε $M \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Επίσης, θέτουμε ως K' τη σταθερά της block βάσης $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$, συνάγουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|z_j - x_{k_j}\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{2^j} = d = \frac{\varepsilon}{8K} < \frac{M}{2K'}$$

Άρα, από το Θεώρημα 1.6.7 έπεται ότι η υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την block βάση $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

1.7 Συμπληρωματικοί υπόχωροι των ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ και c_0

Τα πιο απλά παραδείγματα απειροδιάστατων χώρων Banach είναι οι χώροι c_0 και ℓ_p, για $1 \leq p < +\infty$. Οι χώροι αυτοί εμφανίστηκαν σε πολλά προβήματα της ανάλυσης προτού δωθεί πλούσια θεωρία στους χώρους με νόρμα και μάλιστα, μετά από συνεχείς προσπάθειες, η γεωμετρία τους έγινε γνωστή μέχρι σήμερα.

Πρόταση 1.7.1. *Θέτουμε $X = c_0$ ή ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ και έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μοναδιαία block βάση της συνήθους βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X.*

(i) *Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ο $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισομετρικός με τον X.*

(ii) *Υπάρχει προβολή $P\colon X \to \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ επί και τέτοια, ώστε $\|P\| = 1$.*

(iii) *Κάθε Y κλειστός απειροδιάστατος υπόχωρος του X περιέχει έναν (κλειστό) υπόχωρο Z, ο οποίος είναι ισομορφικός με τον X και συμπληρωματικός του X (και άρα του Y).*

Απόδειξη. (i) Ας υποθέσουμε ότι $X = \ell_p$, $1 \leq p < +\infty$ και ανάλογα εξετάζεται η περίπτωση του $X = c_0$. Ας είναι $x_n = \displaystyle\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_i e_i$, $n = 1, 2, \ldots$ μοναδιαία block βάση της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n \in \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Τότε,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n\right\|_p &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \alpha_i e_i\right\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \beta_n \alpha_i e_i\right\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |\beta_n \alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^p \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |\alpha_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\|x_n\|_p}_{=1} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n\right\|_p.\end{aligned}$$

Επομένως, από την Πρόταση 1.6.5 οι ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμες. Αυτό σημαίνει ότι ορίζεται η ισομετρία $T\colon \ell_p \to \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ως εξής:

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι $X = \ell_p$, $1 < p < +\infty$ και ανάλογα εξετάζονται οι περιπτώσεις όπου $X = c_0$ ή $X = \ell_1$. Έστω μοναδιαία block βάση $x_n = \displaystyle\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \lambda_i e_i$, $n = 1, 2, \ldots$ της βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε ένα στοιχείο x_n^* του υποχώρου $\text{span}\{e_i^* : p_n + 1 \leq i \leq p_{n+1}\} \subset \ell_p^* \sim \ell_q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (δηλαδή, $x_n^* = \displaystyle\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \beta_i e_i^*$) τέτοιο, ώστε $\|x_n^*\|_q = x_n^*(x_n) = 1 = \|x_n\|_p$. Τότε, $x_n^*(x_k) = 0$, για κάθε $n \neq k$. Δηλαδή, η $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ διορθογώνια ακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Οπότε, ορίζεται η απεικόνιση $P\colon X \to \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ με $P(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$, η οποία θα αποδείξουμε ότι είναι μια γραμμική προβολή του X επί του

$\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ νόρμας 1. Αρχικά, για $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in X$, από την ανισότητα Hölder, ισχύει:

$$|x_n^*(x)| = \left| \left(\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \beta_i e_i^* \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right) \right| = \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} \beta_i \alpha_i \leq \underbrace{\left(\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |\beta_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}}_{\|x_n^*\|_q = 1} \left(\sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |\alpha_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \in X$, ισχύει:

$$|x_n^*(x)|^p \leq \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |\alpha_i|^p. \tag{1.19}$$

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βάση Schauder του $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, καθώς $P(x_n) = x_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επεκτείνοντας αυτό, προκύπτει ότι η απεικόνιση P είναι γραμμική προβολή επί του υπόχωρου $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Συνεπώς, $\|P\| \geq 1$. Από την άλλη μεριά, για κάθε $x \in X$, έχουμε

$$\|P(x)\|_p{}^p = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |x_n^*(x)|^p |\lambda_i|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=p_n+1}^{p_{n+1}} |\alpha_i|^p = \|x\|^p.$$

Άρα, η P φραγμένη και τέτοια ώστε $\|P\| = 1$.

(iii) Από τα (i),(ii), την Πρόταση 1.6.9 και την Πρόταση 1.6.10 προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 1.7.2. *Αν $X = c_0$ ή ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ και η block βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της συνήθους βάσης $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X δεν είναι μοναδιαία, ενώ η νόρμα των όρων της ικανοποιεί τη σχέση*

$$0 < a \leq \|x_n\| \leq b < +\infty, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

τότε εφαρμόζοντας το (i) της προηγούμενης πρότασης για την ακολουθία $\left(\frac{x_n}{\|x_n\|} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ προκύπτει ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (αλλά όχι ισομετρικά).

Πόρισμα 1.7.3. *Έστω κλειστός υπόχωρος Y του $X = c_0$ ή ℓ_1. Τότε, ο Y δεν είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω $X = c_0$ ή ℓ_1. Από την Πρόταση 1.7.1 ο Y έχει κλειστό υπόχωρο Z ισόμορφο με τον X. Αλλά, οι χώροι c_0 ή ℓ_1, δεν είναι αυτοπαθείς και άρα, ο Z δεν είναι αυτοπαθής. Δεδομένου ότι κλειστός υπόχωρος αυτοπαθούς χώρου Banach είναι αυτοπαθής και σύμφωνα με τα παραπάνω, έπεται ότι ο Y όχι αυτοπαθής. □

Μέχρι τώρα γνωρίζουμε ότι αν Y συμπληρωματικός υπόχωρος του $X = c_0$ ή ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$, τότε ο Y περιέχει ένα συμπληρωματικό αντίγραφο του X. Μπορούμε να δηλώσουμε κάτι παραπάνω από αυτο; Δηλαδή, μπορεί ο ίδιος ο Y να είναι συμπληρωματικό αντίγραφο του X; Ο Pelczynski ήταν αυτός που έδωσε με «σχετικά ασθενείς» υποθέσεις θετική απάντηση σε αυτό το ερώτημα.

Η κατάσταση είναι η εξής:
Έχουμε δύο χώρους Banach X και Y έτσι, ώστε ο Y να είναι ισόμορφος με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του X, ο X να είναι ισόμορφος με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του Y και θέλουμε να εξετάσουμε αν οι X και Y είναι ισόμορφοι μεταξύ τους. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται **πρόβλημα**

Schröder-Bernstein για χώρους Banach. Γενικά, το πρόβλημα Schröder-Bernstein για χώρους Banach έχει αρνητική απάντηση. Το 1996 ο W. T. Gowers [7] κατασκεύασε δύο μη ισόμορφους χώρους Banach με τον καθένα να περιέχεται συμπληρωματικά στον άλλον. Το θεώρημα που πρόκειται να ακολουθήσει μας δίνει δύο κριτήρια βάσει των οποίων το πρόβλημα Schröder-Bernstein έχει θετική απάντηση σε χώρους Banach. Είναι χρήσιμο πρώτα να παρουσιάσουμε τους χώρους $\ell_p(X),\ 1 \le p < +\infty$ και $c_0(X)$, δοθέντος X χώρου Banach.

Ορισμός 1.7.4. *Έστω X ένας χώρος Banach .*

(i) *Για $1 \le p < +\infty$, ο χώρος $\ell_p(X) = (X \oplus X \oplus \dots)_p$ ονομάζεται **άπειρο ℓ_p-ευθύ άθροισμα του** X και ορίζεται ως εξής:*

$$\ell_p(X) := \{x = (x(n)) \in X^{\mathbb{N}} : (\|x(n)\|)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p\},$$

με νόρμα

$$\|x\| = \|(\|x(n)\|)_{n \in \mathbb{N}}\|_p,\ x \in \ell_p(X).$$

(ii) *Ο χώρος $c_0(X) = (X \oplus X \oplus \dots)_0$ ονομάζεται **άπειρο c_0-ευθύ άθροισμα του** X και ορίζεται ως εξής:*

$$c_0(X) := \{x = (x(n)) \in X^{\mathbb{N}} : (\|x(n)\|)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0\},$$

με νόρμα

$$\|x\| = \|(\|x(n)\|)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty,\ x \in c_0(X).$$

Παρατήρηση 1.7.5. *Είναι σαφές ότι:*

(i) *Οι χώροι $\ell_p(X)$ και $c_0(X)$ με τις αντίστοιχες νόρμες όπως ορίστηκαν παραπάνω καθίστανται χώροι Banach και η απόδειξη είναι όμοια με την αντίστοιχη απόδειξη για τους χώρους ℓ_p και c_0.*

(ii) *Ο $\ell_p(\ell_p)$ είναι ισομετρικός με τον $\ell_p(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \equiv \ell_p(\mathbb{N})$ και ο $c_0(c_0)$ είναι ισομετρικός με τον c_0.*

Παραθέτουμε τώρα το αποτέλεσμα το οποίο φέρει το όνομα «Μέθοδος της Διάσπασης » του Pelczynski (Pelczynski's decomposition method) [19] το οποίο ταξινομεί τους συμπληρωματικούς υποχώρους των χώρων ℓ_p, $1 \le p < +\infty$ και c_0.

Θεώρημα 1.7.6 (Pelczynski, 1960)**.** *Ας είναι χώροι Banach X, Y έτσι, ώστε ο Y να είναι ισόμορφος με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του X και ο X να είναι ισόμορφος με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του Y. Εάν,*

(i) *$X \oplus X \cong X$ και $Y \oplus Y \cong Y$ ή*

(ii) *$X \cong c_0(X)$ ή $X \cong \ell_p(X)$ για κάποιο $1 \le p < +\infty$,*

τότε ο X ισόμορφος με τον Y.

Απόδειξη. Εφόσον ο Y είναι ισόμορφος με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του X και ο X είναι ισόμορφος με ένα συμπληρωματικό υπόχωρο του Y, προκύπτει ότι $X \cong Y \oplus X_1$ για κάποιο X_1 κλειστό υπόχώρο του X και $Y \cong X \oplus Y_1$ για κάποιο Y_1 κλειστό υπόχώρο του Y, αντίστοιχα. Αν ο X και Y ικανοποιούν την υπόθεση (i), τότε

$$X \cong Y \oplus X_1 \cong Y \oplus Y \oplus X_1 \cong Y \oplus X \quad \text{και} \quad Y \cong X \oplus Y_1 \cong X \oplus X \oplus Y_1 \cong X \oplus Y$$

Επομένως, $Y \cong X$.
Αν $X \cong \ell_p(X)$ για κάποιο $1 \leq p < +\infty$, τότε $X \cong \ell_p(X) \oplus X \cong X \oplus X$, και άρα όπως στην περίπτωση (i) πάιρνουμε $Y \cong X \oplus Y$.
Από την άλλη μεριά, $\ell_p(X) \cong \ell_p(Y \oplus X_1) \cong \ell_p(Y) \oplus \ell_p(X_1)$.
Άρα, έχουμε

$$\begin{aligned} X \oplus Y &\cong \ell_p(X) \oplus Y \cong \ell_p(Y) \oplus \ell_p(X_1) \oplus Y \cong \ell_p(Y) \oplus Y \oplus \ell_p(X_1) \cong \ell_p(Y) \oplus \ell_p(X_1) \\ &\cong \ell_p(Y \oplus X_1) \cong \ell_p(X) \cong X. \end{aligned}$$

Ομοίως γίνεται και η περίπτωση που $X \cong c_0(X)$. □

Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.7.6 παίρνουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 1.7.7. *Ας είναι ένας απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος Y του ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ (αντίστοιχα c_0). Τότε, ο Y είναι ισόμορφος με τον ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ (αντίστοιχα c_0).*

Απόδειξη. Η Πρόταση 1.7.1 μας εξασφαλίζει ότι την ύπαρξη ενός Z υποχώρου του Y ισόμορφου και συμπληρωματικού του ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ (αντίστοιχα c_0) και άρα, συμπληρωματικού και στον Y. Αυτό σημαίνει ότι ο ℓ_p είναι ισόμορφος με έναν συμπηρωματικό υπόχωρο του Y. Εφόσον $\ell_p(\ell_p) = \ell_p$ (αντίστοιχα $c_0(c_0) = c_0$), αυτό σημαίνει ότι ικανοποιείται το (ii) του Θεωρήματος 1.7.6, και άρα προκύπτει ότι ο Y είναι ισόμορφος με τον X. □

Ορισμός 1.7.8. *Ένας χώρος Banach ονομάζεται **πρωταρχικός (prime)**, αν κάθε απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του είναι ισόμορφος με αυτόν.*

Παρατήρηση 1.7.9. *Το Θεώρημα 1.7.7 δηλώνει ότι οι χώροι c_0 και ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ είναι πρωταρχικοί. Επίσης, αποδεικνύεται ότι ο ℓ_∞ είναι πρωταρχικός [13]. Εντούτοις, η απόδειξη (η οποία παραλείπεται) διαφέρει λίγο από την απόδειξη της μεθόδου διάσπασης του Pelczynski, αφού ο ℓ_∞ δεν είναι διαχωρίσιμος και συνεπώς δεν διαθέτει βάση Schauder.*

Κεφάλαιο 2

Unconditional βάσεις χώρων Banach

Μια κατηγορία βάσεων ισχυρότερη από αυτή των βάσεων Schauder και αρκετά χρήσιμη στη μελέτη χώρων Banach, είναι αυτή των unconditional βάσεων Schauder. Προτού τις ορίσουμε θα παρουσιάσουμε κάποια γενικά αποτελέσματα που αφορούν την έννοια της unconditional σύγκλισης.

2.1 Unconditional σύγκλιση σειρών

Πρόταση 2.1.1. *Ας είναι χώρος Banach X και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία στοιχείων του X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ συγκλινει, για κάθε π μετάθεση φυσικών αριθμών.*

(ii) *Η σειρά $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ συγκλινει, για κάθε $n_1 < n_2 < \dots$.*

(iii) *Η σειρά $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i x_i$ συγκλινει, για κάθε $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$.*

(iv) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall\, \sigma \subset \mathbb{N}$ *πεπερασμένο με* $\min\sigma > n_1 \Rightarrow \left\| \displaystyle\sum_{i\in\sigma} x_i \right\| < \varepsilon$.

(v) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, $\forall\, x^* \in B_{X^*} \Rightarrow \displaystyle\sum_{i>n_1} |x^*(x_i)| < \varepsilon$.

Μια σειρά που ικανοποιεί μια από τις πέντε παραπάνω συνθήκες την ονομάζουμε ***unconditionally συγκλίνουσα*** *στον X.*

Απόδειξη. (iii) $\Rightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι η σειρά $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i x_i$ συγκλίνει, για κάθε $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ και θα αποδείξουμε ότι για κάθε $n_1 < n_2 < \dots$, η σειρά $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ συγκλινει. Ας είναι $n_1 < n_2 < \dots$.

Θέτουμε, για $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & , \quad i \in \{n_1, n_2, \dots\} \\ -1 & , \quad \text{αλλού} \end{cases}$. Από την υπόθεση η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i x_i$ συγκλινει. Οπότε, η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} 1 \cdot x_i\right)$$

είναι συγκλινουσα.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ συγκλινει,για κάθε $n_1 < n_2 < \dots$ και θα αποδείξουμε ότι για κάθε $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i x_i$ συγκλινει. Έστω $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ και θεωρούμε τις ακολουθίες φισικών αριθμών $n_1 < n_2 < \dots$ και $m_1 < m_2 < \dots$ έτσι, ώστε

$$\{i \in \mathbb{N} : \epsilon_i = 1\} := \{n_1 < n_2 < \dots\} \text{ και } \{i \in \mathbb{N} : \epsilon_i = -1\} := \{m_1 < m_2 < \dots\}.$$

Τότε, από την υπόθεση οι σειρές $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ και $\sum_{i=1}^{\infty} x_{m_i}$ συγκλινουν. Οπότε, η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_{n_i} x_{n_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_{m_i} x_{m_i} = \sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} - \sum_{i=1}^{\infty} x_{m_i}$$

είναι συγκλινουσα.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε πεπερασμένο $\sigma \subset \mathbb{N}$ με $\min \sigma > n_1$ να ισχύει $\left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\| < \varepsilon$. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε μετάθεση $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)}$ συγκλινει. Έστω μετάθεση $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Από το Κριτήριο Σύγκλισης του Cauchy, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, για κάθε $m > k > n_2 \Rightarrow \left\|\sum_{i=k}^{m} x_{\pi(i)}\right\| < \varepsilon$. Εφόσον η π είναι 1-1 και επί, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N} : \pi(i) > n_1,$ για κάθε $i \geq n_2$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \pi(n) \in \{1, 2, \dots, n_1\}\} = \{\pi^{-1}(1), \pi^{-1}(2), \dots, \pi^{-1}(n_1)\},$$

και ορίζουμε $n_2 := \min\{n \in \mathbb{N} : \pi(n) \notin \{1, 2, \dots, n_1\}\} > \max A$. Εφόσον για κάθε $m > k > n_2$, έχουμε $\min\{\pi(i) : i \in \{k, \dots, m\}\} > n_1$, από την υπόθεση προκύπτει το ζητούμενο.

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε πεπερασμένο $\sigma \subset \mathbb{N}$ με $\min \sigma > k_1$ να ισχύει $\left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\| < \varepsilon$ και θα αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία φυσικών αριθμών $n_1 < n_2 < \dots$ η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ συγκλινει. Ας είναι $n_1 < n_2 < \dots$ μια ακολουθία φυσικών αριθμών και τυχαίο $\varepsilon > 0$. Από το Κριτήριο Σύγκλισης του Cauchy, αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N},$ για κάθε $m > k > k_2 \Rightarrow \left\|\sum_{i=k}^{m} x_{n_i}\right\| < \varepsilon$. Εφόσον η $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών υπάρχει $k_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_i > k_1$, για κάθε $i \geq k_2$. Θεωρώντας το σύνολο $B = \{n_1, n_2, \dots, n_{k_1}\}$ αρκεί να ορίσουμε $k_2 := \min\{i \in \mathbb{N} : n_i \notin B\} > \max B$ και έχουμε το ζητούμενο.

Για τις συνεπαγωγές (i) $\Rightarrow$ (iv) και (ii) $\Rightarrow$ (iv) θα υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η (iv) και θα αποδείξουμε ότι δεν ισχύουν οι (i) και (ii). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι δεν ισχύει η (iv). Αυτό σημαίνει ότι

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, \sigma \subset \mathbb{N} \text{ πεπερασμένο με } \min\sigma > n \text{ αλλά } \left\|\sum_{i\in\sigma_n} x_i\right\| \geq \varepsilon.$$

Έτσι, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία πεπερασμένων υποσυνόλων φυσικών αριθμών $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $q_n := \max\sigma_n < p_{n+1} := \min\sigma_{n+1}$, αλλά $\left\|\sum_{i\in\sigma_n} x_i\right\| \geq \varepsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): Θέτουμε $\sigma := \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ και γράφουμε το σύνολο σ ως $\{n_1 < n_2 < \dots\}$ και ορίζοντας την ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_k = \sum_{i=1}^{k} x_{n_i}$ παρατηρούμε ότι η $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ δεν είναι Cauchy, διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $k_1, > k_2 > n \in \mathbb{N}$ τέτοια, ώστε

$$\|S_{k_1} - S_{k_2}\| = \left\|\sum_{i\in\sigma_n} x_{n_i}\right\| \geq \varepsilon.$$

Έτσι, δείξαμε ότι δεν ισχύει η (ii).

(i) $\Rightarrow$ (iv): Επιλέγουμε μία μετάθεση π των φυσικών αριθμών η οποία απεικονίζει το σύνολο $\{i \in \mathbb{N} : p_n \leq i \leq q_n\}$ επί του εαυτού του έτσι, ώστε $\pi^{-1}(\sigma_n) = \{p_n, p_{n+1}, \dots p_n + k_n - 1\}$, όπου $k_n := |\sigma_n|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_m = \sum_{i=1}^{m} x_{\pi(i)}$ δεν είναι Cauchy, διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|S_{p_n+k_n-1} - S_{p_n}\| = \left\|\sum_{i\in\sigma_n} x_{\pi(i)}\right\| \geq \varepsilon.$$

Έτσι, δείξαμε ότι δεν ισχύει η (i).

(v) $\Rightarrow$ (iv): Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση (v) υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $x^* \in B_{X^*}$ να ισχύει $\sum_{i>n_1} |x^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έστω σ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\{n_1+1, n_1+2, \dots\}$. Τότε, από το Θεώρημα Hahn-Banach, συνάγουμε ότι

$$\left\|\sum_{j\in\sigma} x_j\right\| = \sup_{\|x^*\|=1} x^*\left(\sum_{j\in\sigma} x_j\right) = \sup_{\|x^*\|=1} \sum_{j\in\sigma} x^*(x_j) \leq \sup_{\|x^*\|=1} \sum_{j>n_1} |x^*(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Συνεπώς, προκύπτει το ζητούμενο.
Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (iv) και έστω $\varepsilon > 0$. Από την (iv) υπάρχει ένα $n_1 \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $\sigma \subset \mathbb{N}$ πεπερασμένο με $\min\sigma > n_1 \Rightarrow \left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ας είναι τυχαία $x^* \in B_{X^*}$

και $n > n_1$. Θέτουμε $\sigma^+ := \{n_1 < i \leq n : x^*(x_i) > 0\}$ και $\sigma^- := \{n_1 < i \leq n : x^*(x_i) < 0\}$. Οπότε, από την (iv) συναγουμε ότι

$$\sum_{i\in\sigma^+} |x^*(x_i)| = \sum_{i\in\sigma^+} x^*(x_i) = x^*\left(\sum_{i\in\sigma^+} x_i\right) \leq \|x^*\| \left\|\sum_{i\in\sigma^+} x_i\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

και όμοια

$$\sum_{i\in\sigma^-} |x^*(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επομένως, $\displaystyle\sum_{i=n_1+1}^{n} |x^*(x_i)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $n \geq n_1$, προκύπτει ότι

$$\sum_{i>n_1} |x^*(x_i)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

□

Παρατήρηση 2.1.2. *Στην (iv) της Πρότασης 2.1.1 η υπόθεση ότι το σ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ μπορεί να αντικατασταθεί με την υπόθεση ότι το σ είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (iv) για κάθε σ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, τότε θεωρούμε το σύνολο $S = \{n_1 < n_2 < \dots\}$ και από την υπόθεση, ισχύει:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} x_{n_i}\right\| < \varepsilon, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}\,.$$

Συνεπώς, $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}\right\| < \varepsilon$, *ή ισοδύναμα* $\displaystyle\left\|\sum_{i\in S} x_i\right\| < \varepsilon$ *και έχουμε το ζητούμενο.*

Παρατήρηση 2.1.3. *Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης μια σειρά συγκλίνει unconditionally, αν και μόνο αν συγκλινει απόλυτα. Ωστόσο, σε απειροδιάστατους χώρους Banach οι A. Dvoretzky και C. Rodgers [4], έδειξαν ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει σειρά η οποία συγκλίνει unconditionally, αλλά όχι απόλυτα.*

2.2 Η έννοια της unconditional βάσης Schauder

Σύμβαση. *Από εδώ και πέρα, όταν γράφουμε* ***βάση*** *θα εννούμε βάση Schauder και όταν γράφουμε* ***βασική*** *θα εννοούμε Schauder βασική .*

Ορισμός 2.2.1. *Ας είναι χώρος Banach X με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται* ***unconditional βάση*** *του X, αν για κάθε $x \in X$, η μοναδική έκφραση του x ως $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ συγκλινει unconditionally. Επίσης, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ λέγεται* ***unconditional βασική****, αν είναι unconditional βάση του $\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Η ακόλουθη πρόταση είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.1.1.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω χώρος Banach X με βασική ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι unconditional βασική.*

(ii) *Για κάθε* $\pi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, *1-1 και επί, η ακολουθία* $(e_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι βασική.*

(iii) *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n\in\sigma}\alpha_n e_n$ *συγκλίνει, για κάθε* $\sigma\subset\mathbb{N}$,.

(iv) *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n\alpha_n x_n$ *συγκλινει, για κάθε* $(\epsilon_n)\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$.

Από το (ii) της προηγούμενης πρότασης παίρνουμε ότι σε τυχαίο χώρο Banach X με $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unconditional βάση αυτού, για κάθε $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\in X$ και για κάθε σ υποσύνολο του $\mathbb{N}$, ορίζεται ο τελεστής $P_\sigma\colon X\to X$ ως εξής:

$$P_\sigma\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\right):=\sum_{n\in\sigma}\alpha_n e_n.$$

Οι τελεστές P_σ, για κάθε σ λέγονται **unconditional κανονικές προβολές**.

Παρατήρηση 2.2.3. *Αν* $\sigma=\{1,2,\ldots,n\}$, *τότε η* P_σ *ταυτίζεται με την* n*-οστή κανονική προβολή* P_n.

Πρόταση 2.2.4. *Για κάθε* $\sigma\subset\mathbb{N}$, *ο τελεστής* P_σ *είναι γραμμικός και φραγμένος.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο P_σ είναι γραμμικός. Θα αποδείξουμε ότι ο P_σ έχει κλειστό γράφημα. Ας είναι ακολουθία $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\in X$ και $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n$, $y=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n\in X$ έτσι, ώστε $x_k\xrightarrow{k}x$ και $P_\sigma(x_k)\to y$. Θα αποδείξουμε ότι $P_\sigma(x)=y$. Εφόσον $x_k\in X$, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε

$$x_k=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{k,n}e_n,\ \text{για κάθε } k\in\mathbb{N}\,.$$

Από τη συνέχεια των διορθογωνίων συναρτησοειδών $e_n^*\colon X\to\mathbb{R}$ συνάγουμε ότι

$$\alpha_{k,n}\xrightarrow{k}\alpha_n,\quad \text{για κάθε } n=1,2,\ldots \tag{2.1}$$

και εφόσον

$$P_\sigma(x_k)=\sum_{n\in\sigma}\alpha_{k,n}e_n\xrightarrow{k}y=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n e_n,$$

ξανά από τη συνέχεια των διορθογωνίων συναρτησοειδών, έχουμε

$$\alpha_{k,n}\xrightarrow{k}\beta_n,\ \text{για κάθε } n\in\sigma \text{ και } \beta_n=0,\ \text{για κάθε } n\notin\sigma. \tag{2.2}$$

Από τη μοναδικότητα του ορίου στους πραγματικούς και τις σχέσεις (2.1) και (2.2), συνάγουμε ότι $\beta_n=\alpha_n$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$P_\sigma(x_k)=\sum_{n\in\sigma}\alpha_{k,n}e_n\xrightarrow{k}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n=P_\sigma(x).$$

Οπότε, $y=P_\sigma(x)$, και άρα από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος έπεται το ζητούμενο. □

Ομοίως, από το (iii) της προηγούμενης πρότασης γίνεται σαφες ότι σε τυχαίο χώρο Banach X με unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$ και για κάθε $\epsilon = (\epsilon_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, ορίζεται ο τελεστής $M_\epsilon \colon X \to X$ ως εξής:

$$M_\epsilon \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right) := \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \alpha_n e_n.$$

Εντελώς ανάλογα με τον τελεστή P_σ αποδεικνύεται ότι ο τελεστής M_ϵ είναι γραμμικός και φραγμένος.

Παρατήρηση 2.2.5. *Αν* $\sigma = \{i \in \mathbb{N} : \epsilon_i = 1\}$, *τότε* $P_\sigma = \frac{1}{2}(I + M_\epsilon)$.

Πρόταση 2.2.6. *Έστω οι οικογένειες* $(P_\sigma)_\sigma$ *και* $(M_\epsilon)_\epsilon$ *, όπου* P_σ *και* M_ϵ *όπως παραπάνω.*

(i) *Η οικογένεια* $(P_\sigma)_\sigma$ *είναι ομοιόμορφα φραγμένη.*

(ii) $\sup_\sigma \|P_\sigma\| \leq \sup_\epsilon \|M_\epsilon\| \leq 2 \sup_\sigma \|P_\sigma\| < +\infty$, *και άρα η* $(M_\epsilon)_\epsilon$ *ομοιόμορφα φραγμένη.*

Απόδειξη. (i) Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από εφαρμογή της Αρχής Ομοιομόρφου Φράγματος. Πραγματικά, θεωρούμε την οικογένεια $(P_\sigma)_\sigma$, όπου σ διατρέχει όλα υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Εφόσον P_σ φραγμένος, αρκεί να αποδείξουμε ότι για σταθεροποιημένο $x \in X$, η οικογένεια $(P_\sigma(x))_\sigma$ είναι φραγμένη (δηλαδή, $\sup_\sigma \|P_\sigma(x)\| < +\infty$). Σταθεροποιούμε ένα $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in X$. Εφόσον η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ είναι unconditionally συγκλίνουσα, από την (iv) στην Πρόταση 2.1.1 έχουμε ότι

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall\, \tau \subset \mathbb{N} \text{ με } \min \tau > n_1 \Rightarrow \left\| \sum_{i\in\tau} \alpha_i e_i \right\| < 1.$$

Θέτουμε $M := \max \left\{ \left\| \sum_{i\in F} \alpha_i e_i \right\| : F \subset \{1,2,\ldots,n_1\} \right\}$. Έστω $\sigma \subset \mathbb{N}$ και ορίζουμε τα σύνολα $\sigma_1 := \{i \in \sigma : i \leq n_1\}$ και $\sigma_2 := \{i \in \sigma : i > n_1\}$.
Τότε,

$$\|P_\sigma(x)\| = \left\| \sum_{i\in\sigma} \alpha_i e_i \right\| \leq \left\| \sum_{i\in\sigma_1} \alpha_i e_i \right\| + \left\| \sum_{i\in\sigma_2} \alpha_i e_i \right\| \leq 1 + M < +\infty,$$

Άρα, η οικογένεια $(P_\sigma)_\sigma$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.
(ii) Έστω υποσύνολο σ του $\mathbb{N}$ και θέτουμε $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & , \; i \in \sigma \\ -1 & , \; i \notin \sigma \end{cases}$.

Τότε, για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \in X$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \|P_\sigma(x)\| = \left\| \sum_{i\in\sigma} \alpha_i e_i \right\| &\leq \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \alpha_i e_i \right\| + \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_\epsilon \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \alpha_i e_i \right\| + \frac{1}{2} \sup_\epsilon \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \alpha_i e_i \right\| \\ &= \sup_\epsilon \|M_\epsilon(x)\| \leq \sup_\epsilon \|M_\epsilon\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sup_{\sigma}\|P_\sigma\| \leq \sup_{\epsilon}\|M_\epsilon\|.$$

Από την άλλη μεριά, έστω τυχόν $\epsilon = (\epsilon_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ και θέτουμε $\rho = \{i \in \mathbb{N} : \epsilon_i = 1\}$ και $\tau = \{i \in \mathbb{N} : \epsilon_i = -1\}$. Εφόσον, η η βάση $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional, προκύπτει ότι οι σειρές $\sum_{i\in\rho}\alpha_i e_i$ και $\sum_{i\in\tau}\alpha_i e_i$ συγκλίνουν. Οπότε, για κάθε $x = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i \in X$, ισχύει:

$$\begin{aligned}\|M_\epsilon(x)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon_i\alpha_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i\in\rho}\alpha_i e_i - \sum_{i\in\tau}\alpha_i e_i\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{i\in\rho}\alpha_i e_i\right\| + \left\|\sum_{i\in\tau}\alpha_i e_i\right\| \leq 2\sup_{\sigma}\left\|\sum_{\imath\in\sigma}\alpha_i e_i\right\| \\ &\leq 2\sup_{\sigma}\|P_\sigma\|\cdot\|x\|.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sup_{\epsilon}\|M_\epsilon\| \leq 2\sup_{\sigma}\|P_\sigma\|.$$

Άρα, η οικογένεια $\{M_\epsilon\}_\epsilon$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη. □

Ορισμός 2.2.7. *Έστω χώρος Banach X με unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η σταθερά $K := \sup_{\epsilon}\|M_\epsilon\|$, ονομάζεται **unconditional σταθερά της βάσης (unconditional basis constant)** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θα τη συμβολίζουμε με $ubc\{e_n\}$ ή απλώς με K.*

Παρατήρηση 2.2.8. *Έστω χώρος Banach X με unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(i) *Από την Πρόταση 2.2.6 προκύπτει ότι η unconditional σταθερά της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μικρότερη ή ίση από τη σταθερά της ως βάση του X.*

(ii) *Μπορούμε πάντα να ορίσουμε μια ισοδύναμη νόρμα στον X της οποίας η unconditional σταθερά να είναι ίση με 1. Πραγματικά, αρκεί να ορίσουμε ως νόρμα την $\|x\| := \sup_{\epsilon}\|M_\epsilon(x)\|$.*

(iii) *Όταν η unconditional σταθερά ισούται με 1, τότε το $\sup_{\sigma}\|P_\sigma\|$ ισούται με 1. Πραγματικά, Από την Πρόταση 2.2.6 έχουμε ότι $\sup_{\sigma}\|P_\sigma\| \leq 1$, ενώ για $\sigma = \{1,2,\ldots,n\}$ προκύπτει ότι $\|P_\sigma\| \geq 1$.*

Παράδειγμα 2.2.9. *Ας μελετήσουμε τα απλούστερα παραδείγματα χώρων Banach με unconditional βάση.*

(i) *Η συνήθης βάση $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ των χώρων c_0 και $\ell_p, 1 \leq p < +\infty$ είναι unconditional με σταθερά $ubc\{e_i\} = 1$. Πραγματικά, για κάθε $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και $(\epsilon_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, έχουμε*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n\alpha_n e_n\right\|_p = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\right\|_p$$

και

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n\alpha_n e_n\right\|_\infty = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\right\|_\infty.$$

(ii) *Η αθροίζουσα βάση $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του c_0 δεν είναι unconditional.*
Πραγματικά, για $\alpha_n = \epsilon_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$ και τυχαίο $m \in \mathbb{N}$, συνάγουμε ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \alpha_i x_i\right\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i\right\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{i} e_k\right)\right\|_\infty = m.$$

Από την άλλη μεριά,

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right\|_\infty = \left\|\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\left(\sum_{k=1}^{i} e_k\right)\right\|_\infty = \max\left\{\sum_{i=k}^{m}(-1)^i : k \in \{1,\ldots,m\}\right\} = 1.$$

Παρόμοια μπορεί να αποδειχθεί ότι η αθροίζουσα βάση του c δεν είναι unconditional.

Παρατήρηση 2.2.10. *Γενικά, δεν διαθέτουν όλοι οι χώροι Banach unconditional βάση. Δύο τέτοιοι χώροι είναι οι $L_1[0,1]$ (βλ. [1] F. Albiac και N. J. Kalton, Κεφάλαιο 6) και $C[0,1]$ (βλ. [1] F. Albiac και N. J. Kalton, Κεφάλαιο 3). Είναι αληθές ότι κάθε χώρος Banach με βάση, διαθέτει unconditional βασική ακολουθία ή ισοδύναμα έχει υπόχωρο με unconditional βάση; Αυτό ήταν γνωστό και ως πρόβλημα της unconditional βασικής ακολουθίας και τέθηκε το 1958 από τους C.Bessaga και A.Pelcyski [2]. Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δόθηκε το 1993 από τους Gowers και Maurey [9] οι οποίοι κατασκεύασαν έναν χώρο Banach ο οποίος δεν είχε κανέναν υπόχωρο με unconditional βάση.*

Παρατήρηση 2.2.11. *Παρόμοια με το προηγούμενο κεφάλαιο, αποδεικνύονται τα παρακάτω.*

(i) *Κάθε block βάση μιας unconditional βάσης ενός χώρου Banach είναι unconditional βασική ακολουθία με unconditional σταθερά μικρότερη ή ίση της unconditional σταθεράς της βάσης.*

(ii) *Αν $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unconditional βάση ενός χώρου Banach X, τότε η ακολουθία των διορθογωνίων συναρτησοειδών $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional βασική στον X^*, με unconditional σταθερά ίση της unconditional σταθεράς της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Πρόταση 2.2.12. *Έστω χώρος Banach X με unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία έχει unconditional σταθερά K.*

(i) *Για κάθε πραγματική ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ να συγκλινει και κάθε φραγμένη πραγματική ακολουθία $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ισχύει:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i\right\| \leq K \cdot \left(\sup_i |\lambda_i|\right) \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right\|.$$

(ii) *Για κάθε πραγματική ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_i e_i$ να συγκλινει και κάθε πραγματική ακολουθία $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε, $|\alpha_n| \leq |\beta_n|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:*

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i\right\|.$$

Απόδειξη. (i) Από το Θεώρημα Hahn-Banach επιλέγουμε ένα $x^* \in S_{X^*}$ τέτοιο, ώστε

$$x^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i\right\|.$$

Έπειτα, θεωρούμε τα σύνολα
$A := \{i \in \mathbb{N} : \alpha_i x^*(e_i) \geq 0\}$ και $B := \{i \in \mathbb{N} : \alpha_i x^*(e_i) < 0\}$ και ορίζουμε τα πρόσημα
$\epsilon_i = \begin{cases} 1 & , \ i \in A \\ -1 & , \ i \in B \end{cases}$
Τότε,

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i\right\| &= \left|x^*\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i e_i\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \alpha_i x^*(e_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i||\alpha_i x^*(e_i)| \\ &\leq \left(\sup_i |\lambda_i|\right) \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \alpha_i x^*(e_i) \leq \left(\sup_i |\lambda_i|\right) \underbrace{\|x^*\|}_{=1} \left\|M_\epsilon\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right)\right\| \\ &\leq K\left(\sup_i |\lambda_i|\right) \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right\|. \end{aligned}$$

(ii) Υποθέτουμε ότι $|\alpha_i| \leq |\beta_i|$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Από την (i) για $\lambda_i = \dfrac{\alpha_i}{\beta_i}$, ισχύει:

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \beta_i e_i\right\| \leq K \cdot \sup_i |\lambda_i| \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i\right\|.$$

□

2.3 Το θεώρημα του James

Σε αυτή την ενότητα στόχος μας είναι να αποδείξουμε το δεύτερο θεώρημα του James [11], το οποίο μας δίνει έναν ευκολότερο τρόπο να χαρακτηρίζουμε μία unconditional βάση ως συρρικνούσα ή φραγμένα πλήρη και κατά συνέπεια έναν προσφορότερο τρόπο για να χαρακτηρίσουμε ένα χώρο Banach με unconditional βάση ως αυτοπαθή.

Θεώρημα 2.3.1 (R. C. James, 1950). *Έστω χώρος Banach X με unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(i) *Η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα αν και μόνο αν ο ℓ_1 δεν εμφυτεύτεται ισομορφικά στον X.*

(ii) *Η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης αν και μόνο αν ο c_0 δεν εμφυτεύτεται ισομορφικά στον X.*

(iii) *X αυτοπαθής αν και μόνο αν οι ℓ_1 και c_0 δεν εμφυτεύονται ισομορφικά στον X.*

Απόδειξη. (i) Έστω ότι η βαση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα και ας υποθέσουμε ότι ο ℓ_1 εμφυτεύτεται ισομορφικά στον X. Τότε, υπάρχει $T\colon \ell_1 \to X$ ισομορφική εμφύτευση. Έτσι, ο δυϊκός τελεστής $T^*\colon X^* \to \ell_1^* = \ell_\infty$ είναι επί. Αυτό σημαίνει ότι ο X^* δεν είναι διαχωρίσιμος και άρα, δεν έχει βάση, πράγμα άτοπο, διότι, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα.
Αντίστροφα, έστω ότι ο ℓ_1 δεν εμφυτεύτεται ισομορφικά στον X και ας υποθέσουμε ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι συρρικνούσα. Τότε, $\overline{\text{span}}\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\} \neq X^*$, και άρα υπάρχει ένα στοιχείο x^* του $X^* \setminus \overline{\text{span}}\{e_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ με $\|x^*\| = 1$. Όμως, από την Πρόταση 1.3.2 γνωρίζουμε ότι $P_n^*(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x^*(e_i)e_i^*$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Επομένως, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε $\|x^* - P_n^*(x^*)\| > \varepsilon$, για άπειρα n.

Ισχυρισμός 1. *Υπάρχει μοναδιαία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $x^*(u_n) > \varepsilon$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.*

Πραγματικά, θα κατασκευάσουμε μια τέτοια $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω, $n_1 \in \mathbb{N}$. Για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$, έχουμε

$$(x^* - P_{n_1}^*(x^*))\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) = x^*\left(\sum_{n=n_1+1}^{\infty} \alpha_n e_n\right).$$

Εφόσον $\|x^* - P_{n_1}^*(x)\| > \varepsilon$, υπάρχει $m_1 \geq n_1$ και $u_1 = \sum_{n=n_1}^{m_1} \alpha_n e_n$, με $\|u_1\| = 1$ ώστε $x^*(u_1) > \varepsilon$. Έστω τώρα $n_2 = m_1 + 1 > m_1$ ώστε $\|x^* - P_{n_2}(x^*)\| > \varepsilon$. Τότε, υπάρχει $m_2 \geq n_2$ και $u_2 = \sum_{n=n_2}^{m_2} \alpha_n e_n$, με $\|u_2\| = 1$ ώστε $x^*(u_2) > \varepsilon$. Συνεχίζοντας επαγωγικά παίρνουμε το ζητούμενο του εν λόγω ισχυρισμού.

Ισχυρισμός 2. *Η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1.*

Πραγματικά, εφόσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional, η block $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional βασική. Θέτουμε $ubc\{u_n\} = K$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και για $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & , \quad \alpha_i > 0 \\ -1 & , \quad \alpha_i \leq 0 \end{cases}$ και από τον Ισχυρισμό 1, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \geq \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right\| \geq \frac{1}{K}\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \alpha_i u_i\right\| \geq \frac{1}{K}\, x^*\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \alpha_i u_i\right) \geq \varepsilon \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

Επομένως, από την Πρόταση 1.6.5 έπεται το ζητούμενο του εν λόγω ισχυρισμού.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $T\colon \ell_1 \to X$, πράγμα άτοπο.

(ii) Εστω ότι η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης και ας υποθέσουμε ότι ο c_0 εμφυτεύτεται ισομορφικά στον X. Τότε, υπάρχει $T\colon c_0 \to X$ ισομορφική εμφύτευση. Αν $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης βάση του c_0, θέτουμε $T(z_n) := x_n \in X$. Τότε, υπάρχει $M_1 > 0$ τέτοιο, ώστε $\|z_n\| \leq M_1 \|T(z_n)\|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, $\|x_n\| > \frac{1}{M_1} := M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, είναι γνωστό ότι $z_n \xrightarrow{w} 0$. Εφόσον, η T είναι συνεχής προκύπτει ότι η T w-συνεχής, και άρα $T(z_n) \xrightarrow{w} 0$. Επομένως, από το Θεώρημα 1.6.10, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η οποία είναι βασική και ισοδύναμη με κάποια block βάση $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επειδή η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional και φραγμένα πλήρης, η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι unconditional βασική και φραγμένα πλήρης. Έτσι, η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης και επειδή T ισομορφική εμφύτευση, έπεται ότι η ακολουθία $T^{-1}(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένα πλήρης υπακολουθία της συνήθους βάσης του c_0 και αυτό είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι ο c_0 δεν εμφυτεύεται ισομορφικά στον X και ας υποθέσουμε ότι η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι φραγμένα πλήρης. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| < +\infty$ και η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ να μη συγκλίνει. Συνεπώς, δεν είναι ακολουθία Cauchy.
Οπότε,

$$\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, n_0 \in \mathbb{N}, \exists\, n > m \geq n_0, \text{ ώστε } \left\|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i\right\| \geq \varepsilon.$$

Με μια επαγωγική κατασκευή επιλέγουμε φυσικούς αριθμούς $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < \ldots$, ώστε για $u_j = \sum_{i=p_j}^{q_j} \alpha_i e_i$ να ισχύει $\|u_j\| \geq \varepsilon$, για κάθε $j = 1, 2, \ldots$. Επειδή, $\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right\| < +\infty$ και η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional, προκύπτει ότι $L := \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\| < +\infty$.

Ισχυρισμός. *Η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0.*

Πραγματικά, εφόσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional, η block $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional βασική. Θέτουμε $ubc\{u_n\} = K$ και $M := \sup_{\sigma\subset\mathbb{N}} \|P_\sigma\|$. Επίσης, ας είναι $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και θέτουμε $|\alpha_m| := \max_{1\leq i\leq n} |\alpha_i|$. Έτσι, έχουμε

$$\|\alpha_m u_m\| = P_{\{m\}}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right\|.$$

Άρα,

$$\varepsilon|\alpha_m| \leq M \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right\|.$$

Επομένως,

$$\frac{\varepsilon}{M} \max_{1\leq i\leq n} |\alpha_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right\|.$$

Από την άλλη μεριά, εφόσον $|\alpha_i| \leq |\alpha_m|$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, από την Πρόταση 2.2.12, έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_m u_i\right\| = K|\alpha_m| \left\|\sum_{i=1}^{n} u_i\right\| \leq KL \max_{1\leq i\leq n} |\alpha_i|.$$

Συνεπώς, από τον παραπάνω Ισχυρισμό ο c_0 εμφυτεύεται ισομορφικά στον X, πράγμα άτοπο.

(iii) Έπεται, άμεσα από τα (i), (ii) και το Θεώρημα 1.3.9. □

2.4 Το θεώρημα του Zippin

Από την Πρόταση 1.7.1 είναι σαφές ότι η συνήθεις βάσεις των χώρων c_0 και $\ell_p, 1 \leq p < +\infty$ είναι ισοδύναμες με κάθε block βάση τους. Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τις συνήθεις βάσεις των χώρων c_0 και $\ell_p, 1 \leq p < +\infty$. Αυτό είναι και το περιεχόμενο του θεωρήματος του M. Zippin [25]. Για την απόδειξη του θεωρήματος είναι χρήσιμο το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.4.1. *Έστω $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, με $1 \leq \lambda_n \leq n$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $M^{-1}\lambda_n\lambda_{n^{k-1}} \leq \lambda_{n^k} \leq M\lambda_n\lambda_{n^{k-1}}$, για κάθε $n, k = 1, 2, \ldots$, τότε υπάρχει $a \in [0, 1]$ ώστε $M^{-1}n^a \leq \lambda_n \leq Mn^a$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$.*

Απόδειξη.

Ισχυρισμός 1. $M^{-k}{\lambda_n}^k \leq \lambda_{n^k} \leq M^k {\lambda_n}^k$, *για κάθε* $n, k = 1, 2, \ldots$.

Πραγματικά, με επαγωγή (στο k), αν $k = 1$ από την υπόθεση, έχουμε

$$M^{-1}\lambda_n\lambda_1 \leq \lambda_{n^k} \leq M\lambda_n\lambda_1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και επειδή $\lambda_1 = 1$, ισχύει:

$$M^{-1}\lambda_n \leq \lambda_n \leq M\lambda_n, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Ας υποθέσουμε ότι για $k = l > 1$ αληθεύει ο Ισχύρισμος 1 και θα δείξουμε ότι επίσης αληθεύει για $k = l + 1$. Είναι,

$$\begin{aligned} M^{-l-1}\lambda_n^{l+1} &\leq M^{-1}\lambda_n M^{-l}\lambda_n^l \leq M^{-1}\lambda_n\lambda_{n^l} \leq \lambda_{n^{l+1}} \\ &\leq M\lambda_n\lambda_{n^l} \leq M\lambda_n M^l\lambda_{n^l} = M^{l+1}\lambda_{n^{l+1}}. \end{aligned}$$

Άρα, αποδείχθηκε ο Ισχυρισμός 1.
Ας είναι $m, n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός 2. $n^{[k\log m]} \leq m^{[k\log n]+1}$, *για κάθε* $k = 1, 2, \ldots$, *όπου* $[k\log m]$ *και* $[k\log n]$ *είναι τα ακέραια μέρη των θετικών πραγματικών αριθμών* $k\log m$ *και* $k\log n$.

Πραγματικά, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$[k\log m]\log n \leq ([k\log n] + 1)\log m, \text{ για κάθε } k = 1, 2, \ldots$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τις ανισότητες $[k\log m] \leq k\log m$ και $k\log n < [k\log n] + 1$ κατά μέλη παίρνουμε το ζητούμενο του Ισχυρισμού 2.
Εφόσον $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα και από τους Ισχυρισμούς 1,2, για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, συνάγουμε ότι

$$M^{-[k\log m]}\lambda_n^{[k\log m]} \leq \lambda_{n^{[k\log m]}} \leq \lambda_{m^{[k\log n]+1}} \leq M^{[k\log n]+1}\lambda_m^{[k\log n]+1}. \tag{2.3}$$

Από τη μονοτονία του λογαρίθμου και τη σχέση (2.3), έχουμε

$$-[k\log m]\log M + [k\log m]\log\lambda_n \leq ([k\log n] + 1)\log M + ([k\log n] + 1)\log\lambda_m, \tag{2.4}$$

και από τις ανισότητας $-x \leq -[x]$, $x - 1 < [x]$ $[x] \leq x < [x] + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τη σχέση (2.4) και επειδή $M > 1$, συνάγουμε ότι

$$-k\log m\log M + (k\log m - 1)\log\lambda_n \leq (k\log n + 1)\log M + (k\log n + 1)\log\lambda_m \Leftrightarrow$$

$$k\log m\log\lambda_n - k\log n\log\lambda_m \leq k(\log m + \log n)\log M + \log M + \log\lambda_n + \log\lambda_m \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log\lambda_n}{\log n} - \frac{\log\lambda_m}{\log m} \leq \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log m}\right)\log M + \frac{\log M + \log\lambda_n + \log\lambda_m}{k\log m\log n}, \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}\,.$$

Εναλλάσοντας τους δείκτες m και n συνάγουμε ότι

$$\frac{\log\lambda_m}{\log m} - \frac{\log\lambda_n}{\log n} \leq \left(\frac{1}{\log m} + \frac{1}{\log n}\right)\log M + \frac{\log M + \log\lambda_m + \log\lambda_n}{k\log n\log m}, \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}\,.$$

Επομένως,

$$\left|\frac{\log\lambda_n}{\log n} - \frac{\log\lambda_m}{\log m}\right| \leq \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log m}\right)\log M + \frac{\log M + \log\lambda_n + \log\lambda_m}{k\log m\log n}, \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}\,.$$

Επειδή $\dfrac{\log M + \log \lambda_n + \log \lambda_m}{k \log m \log n} \xrightarrow{k} 0$, τελικά έχουμε ότι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$\left| \frac{\log \lambda_n}{\log n} - \frac{\log \lambda_m}{m} \right| \leq \log M \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log m} \right) \log M. \tag{2.5}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $x_n = \dfrac{\log \lambda_n}{\log n}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι Cauchy στον $\mathbb{R}$, και άρα είναι συγκλινουσα. Έστω, a το όριο της. Τώρα, επειδή $1 \leq \lambda_n \leq n$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, έπεται ότι $0 \leq x_n \leq 1$, και άρα $0 \leq a \leq 1$. Στη συνέχεια, σταθεροποιώντας το n και παίρνοντας στη σχέση (2.5) το όριο για $m \to +\infty$, έχουμε

$$\left| \frac{\log \lambda_n}{\log n} - a \right| \leq \frac{\log M}{\log n}.$$

Ισοδύναμα,

$$M^{-1} n^a \leq \lambda_n \leq M n^a, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \ldots .$$

□

Θεώρημα 2.4.2 (M. Zippin, 1966). *Έστω χώρος Banach X με μοναδιαία βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αν η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με κάθε μοναδιαία block βάση της, τότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0 ή με τη συνήθη βάση του ℓ_p, για κάποιο $1 \leq p < +\infty$.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ η ακολουθία $(\epsilon_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μοναδιαία block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έτσι, από την υπόθεση $(\epsilon_n e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα, για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \epsilon_k \alpha_k e_k$ συγκλινει στον X, αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ συγκλινει στον X. Οπότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ συγκλινει unconditionally. Συνεπώς, η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional βάση του X. Αντικαθιστώντας την νόρμα του χώρου με μια ισοδύναμη νόρμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $ubc\{e_n\} = 1$. Έστω τώρα $\{(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}\}_{i\in I}$ να είναι η οικογένεια όλων των block βάσεων της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $i \in I$. Από την υπόθεση, η $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επομένως, υπάρχει ισομορφισμός $T_i \colon X \to \overline{\mathrm{span}}\{x_n^i : n \in \mathbb{N}\}$ τέτοιος, ώστε $T_i\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k^i$. Εφόσον, T ισομορφισμός, ο $T_i^{-1} \colon \overline{\mathrm{span}}\{x_n^i : n \in \mathbb{N}\} \to X$ είναι τέτοιος, ώστε $T_i^{-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k^i\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$. Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος υπάρχει σταθερά $M > 0$, για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνάγουμε ότι (βλ. [22], Πρόταση 24.2, σελ. 610)

$$M^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \right\| \leq M \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\|. \tag{2.6}$$

Προς εφαρμογή του Λήμματος 2.4.1 ορίζουμε την ακολουθία πραγματικών αριθμών $k_n = \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} e_n \right\|$, $n = 1, 2, \ldots$. Ισχύει $1 = ubc\{e_n\} \geq bc\{e_n\}$. Όμως, εξ ορισμού $bc\{e_n\} \geq 1$. Συνεπώς, $bc\{e_n\} = 1$ και αυτό σημαίνει ότι η βάση είναι μονότονη. Οπότε, η ακολουθία $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Έτσι, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε $k_n \geq k_1 = \|e_1\| = 1$ και ακόμη $k_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \|e_n\| = n$. Οπότε, $1 \leq k_n \leq n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. *Για κάθε $n, l \in \mathbb{N}$, ισχύει:*

$$M^{-2} k_{n^{l-1}} k_n \le k_{n^l} \le M^2 k_{n^{l-1}} k_n.$$

Ας είναι $n, l \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$\alpha_m := \left\| \sum_{k=(m-1)n^{l-1}+1}^{mn^{l-1}} e_k \right\| \text{ και } x_m := \frac{1}{\alpha_m} \sum_{k=(m-1)n^{l-1}+1}^{mn^{l-1}} e_k,\ m \in \mathbb{N}\,.$$

Είναι σαφές ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μοναδιαία block βάση της $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Επίσης, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n^l} e_k$. Οπότε, $\left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n^l} e_k\right\| = k_{n^l}$ και $\alpha_1 = \left\|\sum_{k=1}^{n^l} e_k\right\| = k_{n^{l-1}}$. Έπειτα, από τη σχέση (2.6) ισχύει:

$$M^{-1}\alpha_1 \le \alpha_m \le M\alpha_1, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots\ .$$

Άρα,

$$k_{n^l} = \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right\| \ge M^{-1} \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| = M^{-1}|\alpha_1| \left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_1} e_k\right\|. \tag{2.7}$$

Επειδή, $\frac{\alpha_k}{\alpha_1} \ge M^{-1}$, για κάθε $k = 1, 2, \dots$, από την Πρόταση 2.2.12 έπεται το εξής:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\alpha_1} e_k\right\| \ge \left\|\sum_{k=1}^{n} M^{-1} e_k\right\| = M^{-1} k_n.$$

Οπότε, η σχέση (2.7) γίνεται

$$k_{n^l} \ge M^{-2} k_{n^{l-1}} k_n.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$k_{n^l} \le M^2 k_{n^{l-1}} k_n.$$

Συνεπώς, από το 2.4.1 υπάρχει $\alpha \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε

$$M^{-2} n^a \le k_n \le M^2 n^a, \text{ για κάθε } n = 1, 2, \dots \tag{2.8}$$

(i) Αν $a = 0$, τότε $M^{-2} \le k_n \le M^2$, για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Ας είναι $n \in \mathbb{N}$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει $\rho \in \{1, 2, \dots, n\}$ ώστε $|\mu_\rho| = \max_{1\le k\le n} |\mu_k|$. Είναι

$$|\mu_\rho| = \|\mu_\rho e_\rho\| \le \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k\right\|. \tag{2.9}$$

Εφόσον, $|\mu_k| \le |\mu_\rho|$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, από την Πρόταση 2.2.12 έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k\right\| \le \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_\rho e_k\right\| = |\mu_\rho| \left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\| = \mu_\rho k_n \le \mu_\rho M^2.$$

Άρα, η σχέση (2.9) γίνεται

$$\max_{1\le k\le n} |\mu_k| = |\mu_\rho| \le \left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k\right\| \le M^2 |\mu_\rho| = M^2 \max_{1\le k\le n} |\mu_k|.$$

Συνεπώς, η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0.

(ii) Αν $a \in (0,1]$ θέτουμε $p = \dfrac{1}{a}$.

Ισχυρισμός. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mu_1, \ldots, \mu_n$ θετικούς ρητούς, ισχύει:*

$$M^{-6}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{1/p}e_k\right\| \leq M^{6}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{1/p}.$$

Πραγματικά, ας είναι $n \in \mathbb{N}$ και $\mu_1, \ldots, \mu_n$ θετικοί ρητοί. Τότε, υπάρχουν $m, m_1, \ldots, m_n$ τέτοια, ώστε $\mu_k = \dfrac{m_k}{m}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Είναι,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{1/p}e_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k^{1/p}}{m^{1/p}}e_k\right\| = m^{-1/p}\left\|\sum_{k=1}^{n}m_k^{1/p}e_k\right\|. \tag{2.10}$$

Από τη σχέση (2.8) ισχύει $m_k^{1/p} \geq M^{-2}k_{m_k}$ και ακολούθως από την Πρόταση 2.2.12 συνάγουμε ότι

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}m_k^{1/p}e_k\right\| \geq M^{-2}\left\|\sum_{k=1}^{n}k_{m_k}e_k\right\|.$$

Συνεπώς η σχέση (2.10) γίνεται

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{1/p}e_k\right\| \geq M^{-2}m^{-1/p}\left\|\sum_{k=1}^{n}k_{m_k}e_k\right\|. \tag{2.11}$$

Θέτουμε $s_1 = 0$ και $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} m_i$, για $k = 2, 3, \ldots, n$ και επίσης ορίζουμε

$$\alpha_k = \left\|\sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}}e_l\right\| \quad \text{και} \quad x_k = \frac{1}{\alpha_k}\sum_{l=s_k+1}^{s_{k+1}}e_l.$$

Είναι σαφές ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Επίσης, $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k = \sum\limits_{l=1}^{m_1+\cdots+m_n}e_l$. Οπότε,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\| = \left\|\sum_{l=1}^{m_1+\cdots+m_n}e_l\right\| = k_{\sum_{k=1}^{n}m_k}. \tag{2.12}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2.6), (2.12) και (2.8) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n}k_{m_k}e_k\right\| &\geq M^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k e_k\right\| \geq M^{-2}\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right\| = M^{-2}k_{\sum_{k=1}^{n}m_k}\\
&\geq M^{-4}\left(\sum_{k=1}^{n}m_k\right)^{1/p} = M^{-4}m^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, από το προηγούμενο, η σχέση (2.11) γίνεται

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{1/p}e_k\right\| \geq M^{-6}\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{1/p}.$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \mu_k^{1/p} e_k\right\| \leq M^6 \left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k\right)^{1/p}.$$

Επομένως, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p, για κάποιο $1 \leq p < +\infty$.

$\square$

Παρατήρηση 2.4.3. *Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2 φαίνεται ότι το συμπέρασμα ισχύει και με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με κάθε μοναδιαία block βάση της με σταθερούς συντελεστές. Αυτό θα φανεί χρήσιμο στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της μεταπτυχιακής διατριβής.*

Κεφάλαιο 3

Μοναδικότητα unconditional βάσης

Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να προσδιορίσουμε αυτούς τους χώρους Banach για τους οποίους δύο τυχαίες μοναδιαίες unconditional βάσεις είναι ισοδύναμες. Αυτό ονομάζεται **πρόβλημα μοναδικότητας unconditional βάσης** (ως προς ισοδυναμία) και μια βάση σε έναν τέτοιο χώρο Banach X λέγεται **μοναδική unconditional βάση** (ως προς ισοδυναμία) του X. Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θα παρουσιάσουμε μια στοιχειώδη θεωρία $p-$απολύτως αθροίσιμων τελεστών και συμμετρικών βάσεων. Διατυπώνουμε το κυρίως θεώρημα του οποίου η απόδειξη οφείλεται στους J. Lindenstrauss και M. Zippin [17].

Θεώρημα 3.0.1 (J. Lindenstrauss, M. Zippin, 1969)**.** *Ένας χώρος Banach X έχει μοναδική unconditional βάση (ως προς ισοδυναμία), αν και μόνο αν ο X είναι ισόμορφος με έναν από τους χώρους: c_0, ℓ_1 και ℓ_2.*

3.1 p-Απολύτως αθροίσιμοι τελεστές

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε μερικά βασικά αποτελέσματα που αφορούν την κλάση των $p-$απολύτως αθροίσιμων τελεστών. Τα αποτελέσματα αυτά είναι χρήσιμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.0.1.

Ορισμός/Συμβολισμός 3.1.1. *Ας είναι X, Y χώροι Banach και $p \geq 1$. Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ονομάζεται $p-$**απολύτως αθροίσιμος (p-absolutely summing)**, αν υπάρχει $K \geq 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$, να ισχύει:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|T(x_i)\|^p \right)^{1/p} \leq K \cdot \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p \right)^{1/p}. \tag{3.1}$$

*Η μικρότερη σταθερά K για την οποία ικανοποιείται η ανισότητα (3.1) συμβολίζεται με $\pi_p(T)$. Επίσης, το σύνολο των p-απολύτως αθροίσιμων τελεστών συμβολίζεται με $\Pi_p(X, Y)$. Αν ένας τελεστής $T \notin \Pi_p(X, Y)$, τότε $\pi_p(T) = +\infty$. Τέλος, ένας τελεστής που είναι 1-απολύτως αθροίσιμος θα λέγεται απλώς **απολύτως αθροίσιμος**.*

Πρόταση 3.1.2. *Ας είναι X, Y χώροι Banach και $p \geq 1$.*

(i) *Ο $\Pi_p(X, Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(X, Y)$.*

(ii) *Ο $(\Pi_p(X, Y), \pi_p(\cdot))$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. (i) Ας είναι $T, S \in \Pi_p(X,Y)$ και έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Από την ανισότητα του Minkowski, για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n$, συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|(T+S)(x_i)\|^p\right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)+S(x_i)\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n (\|T(x_i)\|+\|S(x_i)\|)^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n \|S(x_i)\|^p\right)^{1/p} \\
&\leq [\pi_p(T)+\pi_p(S)] \cdot \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Οπότε, $T+S \in \Pi_p(X,Y)$ και $\pi_p(T+S) \leq \pi_p(T)+\pi_p(S)$.
Επίσης,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\lambda T(x_i)\|^p\right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p\right)^{1/p} \leq |\lambda|\pi_p(T) \cdot \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}.$$

Οπότε, $\lambda T \in \Pi_p(X,Y)$ και $\pi_p(\lambda T) \leq |\lambda|\pi_p(T)$. Μάλιστα, για $\lambda = 0$, ισχύει ως ισότητα, ενώ για $\lambda \neq 0$, είναι

$$|\lambda|\pi_p(T) = |\lambda|\pi_p\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda T)\right) \leq |\lambda|\frac{1}{|\lambda|}\pi_p(\lambda T) = \pi_p(\lambda T)$$

(ii) Από το (i) και το γεγονός ότι αν $T \neq 0$, τότε $\pi_p(T) > 0$ και $T = 0 \iff \pi_p(T) = 0$, προκύπτει ότι η απεικόνιση $\pi_p(\cdot)$ είναι μία νόρμα στον $\Pi_p(X,Y)$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο $(\Pi_p(X,Y), \pi_p(\cdot))$ είναι χώρος Banach. Αρκεί να αποδείξουμε ότι κάθε ακολουθία Cauchy $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\Pi_p(X,Y)$ είναι συγκλινουσα στον $\Pi_p(X,Y)$. Για κάθε $x \in X$, ισχύει

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \pi_p(T_n - T_m) \cdot \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*(x)| \leq \pi_p(T_n - T_m)\|x\|,$$

και εφόσον η ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον $\Pi_p(X,Y)$, η ακολουθία $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον Y, και άρα συγκλινουσα. Θέτουμε $T(x) = \lim_n T_n(x)$. Ο T είναι γραμμικός ως κατά σημείο όριο γραμμικών. Εφόσον,

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \sup_n \pi_p(T_n) \cdot \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*(x)| = \sup_n \pi_p(T_n)\|x\|,$$

προκύπτει ότι ο T είναι φραγμένος. Τώρα μένει να αποδείξουμε ότι $\pi_p(T) < +\infty$ και $\pi_p(T_n - T) \xrightarrow{n} 0$.

Ισχυρισμός. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$.*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i) - T_{n_0}(x_i)\|^p\right)^{1/p} \leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}, \text{ για κάποιο } n_0 \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Πραγματικά, αν $\sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p} = 0$, τότε $x_i = 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και η προηγούμενη ανισότητα αληθεύει. Αν $\sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p} > 0$, επειδή ισχύει $T_k(x_i) \xrightarrow{k} T(x_i)$, έχουμε

$$\lim_k \left(\sum_{i=1}^{n}\|T(x_i) - T_k(x_i)\|^p\right)^{1/p} = 0.$$

Επομένως,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|T(x_i) - T_{n_0}(x_i)\|^p\right)^{1/p} \leq \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}, \text{για κάποιο } n_0 \in \mathbb{N}\,.$$

Είναι,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\|T(x_i)\|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|T_{n_0}(x_i)\|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}\|T(x_i) - T_{n_0}(x_i)\|^p\right)^{1/p}\\ &\leq \pi_p(T_{n_0}) \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p} + \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}\\ &\leq [1 + \sup_n \pi_p(T_n)] \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

Άρα, $\pi_p(T) \leq 1 + \sup_n \pi_p(T_n) < +\infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m > k \geq k_0$ να ισχύει $\pi_p(T_m - T_k) < \varepsilon$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$ και κάθε $m > k \geq k_0$, ισχύει:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\|T_m(x_i) - T_k(x_i)\|^p\right)^{1/p} &\leq \pi_p(T_m - T_k) \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}\\ &\leq \varepsilon \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο για $m \to +\infty$ για κάθε $k \geq k_0$, ποκύπτει ότι

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|T(x_i) - T_k(x_i)\|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon \sup_{\|x^*\|\leq 1}\left(\sum_{i=1}^{n}|x^*(x_i)|^p\right)^{1/p}.$$

Συνεπώς, για κάθε $k \geq k_0$ συνάγουμε ότι $\pi_p(T_n - T) \leq \varepsilon$.

□

Πρόταση 3.1.3. *Ισχύουν τα παρακάτω.*

(i) $\|T\| \leq \pi_p(T)$, *για κάθε* $T \in \Pi_p(X, Y)$.

(ii) *Αν $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$, τότε*

$$\pi_p(S \circ T) \leq \|S\|\pi_p(T) \quad \textit{και} \quad \pi_p(S \circ T) \leq \|T\|\pi_p(S).$$

(iii) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$,* $\displaystyle\sup_{\|x^*\|=1} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| = \sup_{\epsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|$.

(iv) *Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής είναι απολύτως αθροίσιμος, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του X, αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλινει unconditionally, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$ συγκλίνει απόλυτα.*

Απόδειξη. (i) Έστω $T \in \Pi_p(X,Y)$. Τότε, για κάθε $x \in X$, ισχύει:

$$\|Tx\| \leq \pi_p(T) \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*(x)| \leq \pi_p(T)\|x\|.$$

Οπότε, ο T είναι φραγμένος και μάλιστα $\|T\| \leq \pi_p(T)$.

(ii) Ας είναι $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ και $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Θέτουμε $A_p := \displaystyle\sup_{\|x^*\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|^p \right)^{1/p}$, για $p \geq 1$
Είναι,

$$\begin{aligned}
\pi_p(S \circ T) &:= \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| S \circ T \left(\frac{x_i}{A_p} \right)^p \right\| \right)^{1/p} : (x_i)_{i=1}^n \subset X \right\} \\
&\leq \|S\| \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| T \left(\frac{x_i}{A_p} \right)^p \right\| \right)^{1/p} : (x_i)_{i=1}^n \subset X \right\} \\
&\leq \|S\|\pi_p(T)
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\pi_p(S \circ T) &= \frac{\|T\|}{\|T\|} \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| S \circ T \left(\frac{x_i}{A_p} \right)^p \right\| \right)^{1/p} : (x_i)_{i=1}^n \subset X \right\} \\
&= \|T\| \sup \left\{ \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| S \circ \frac{T}{\|T\|} \left(\frac{x_i}{A_p} \right)^p \right\| \right)^{1/p} : (x_i)_{i=1}^n \subset X \right\} \\
&\leq \|T\|\pi_p(S)
\end{aligned}$$

(iii) Θέτουμε $A := \displaystyle\sup_{\|x^*\|=1} \sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)|$ και $B := \displaystyle\sup_{\epsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|$. Θα αποδείξουμε ότι $A \leq B$ και $B \leq A$.
Για το πρώτο, έστω $x^* \in S_{X^*}$ και θεωρούμε $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & , \quad x^*(x_i) \geq 0 \\ -1 & , \quad x^*(x_i) < 0 \end{cases}$
Οπότε,

$$\sum_{i=1}^{n} |x^*(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x^*(x_i) = x^* \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right) \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|.$$

Για το δεύτερο, έστω $\epsilon_i = \pm 1, 1 \le i \le n$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει ένα $x^* \in S_{X^*}$ τέτοιο, ώστε $x^*\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|$. Οπότε,

$$\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| \ge \sum_{i=1}^n \epsilon_i x^*(x_i) = \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|.$$

(iv) Έστω T ένας απολύτως αθροίσιμος τελεστής και έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ τέτοια, ώστε $\sum_{n=1}^\infty x_n$ να συγκλινει unconditionally. Θα αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \|T(x_n)\|$ είναι συγκλίνουσα.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η σειρά $\sum_{n=1}^\infty x_n$ συγκλινει unconditionally, από την Πρόταση 2.1.1,

$$\exists\ n_1 \in \mathbb{N}, \forall\ x^* \in B_{X^*} \Rightarrow \sum_{i>n_1} |x^*(x_i)| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Από τη σχέση (3.3) και το γεγονός ότι ο τελεστής T είναι απολύτως αθροίσιμος, για κάθε $n > n_1$, ισχύει:

$$\sum_{i=n_1+1}^n \|T(x_i)\| \le \pi_p(T) \cdot \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{i=n_1+1}^n |x^*(x_i)| < \pi_p(T)\cdot\varepsilon.$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ο T δεν είναι απολύτως αθροίσιμος τελεστής. Έτσι, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, υπάρχει $n_j \in \mathbb{N}$ και διανύσματα $x_1^j, x_2^j, \ldots, x_{n_j}^j \in X$, τέτοια, ώστε $\sum_{i=1}^{n_j} \|T(x_i^j)\| = 1$ και $2^{-j} > \sup_{x^*\in B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |x^*(x_i^j)|$. Οπότε, αριθμώντας τα διανύσματα $(x_i^1)_{i=1}^{n_1}, (x_i^2)_{i=1}^{n_2}, \ldots$ ως $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και παίρνοντας τη σειρά των όρων αυτής της ακολουθίας $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, αυτή από την κατασκευή της ικανοποιεί την συνθήκη (v) στην Πρότασης 2.1.1. Πραγματικά, για τυχαίο $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $j_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $2^{-j_0} < \varepsilon$. Τότε,

$$\sum_{i>n_1+\cdots+n_{j_0}} |x^*(y_i)| \le \sum_{j=j_0+1}^\infty \sum_{i=1}^{n_j} |x^*(x_i^j)| \le \sum_{j=j_0+1}^\infty 2^{-j} = 2^{-j_0} < \varepsilon.$$

Οπότε, η σειρά $\sum_{i=1}^\infty y_i$ συγκλινει unconditionally.

Από την άλλη μεριά, έχουμε $\sum_{i=1}^\infty \|T(y_i)\| = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^{n_j} \|T(x_i^j)\| = \sum_{j=1}^\infty 1 = +\infty$, δηλαδή η σειρά $\sum_{i=1}^\infty \|T(y_i)\|$ δε συγκλίνει.

□

Παρατήρηση 3.1.4. *Από την προηγούμενη πρόταση, γίνεται σαφές ότι οι απολύτως αθροίσιμοι τελεστές είναι ακριβώς εκείνοι οι τελεστές που απεικονίζουν unconditional συγκλίνουσες σειρές σε απολύτως συγκλινουσες σειρές.*

Πρόταση 3.1.5. *Ας είναι X, Y δύο χώροι Banach και έστω ο τελεστής $T\colon X \to Y$. Αν $1 \le p < q < +\infty$ και ο T είναι p-απολύτως αθροίσιμος τελεστής, τότε είναι και q-απολύτως αθροίσιμος τελεστής. Μάλιστα, $\pi_q(T) \le \pi_p(T)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $p < q$ και υποθέτουμε ότι τυχούσα πεπερασμένη ακολουθία διανυσμάτων $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ ικανοποιεί τη σχέση $\left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^q\right)^{1/q} \le 1$, για κάθε $x^* \in B_{X^*}$. Έτσι, για κάθε $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$, από την ανισότητα Hölder, έχουμε

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^p |x^*(x_i)|^p\right)^{1/p} \le \left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^{\frac{pq}{p}}\right)^{p/q}\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}. \quad (3.4)$$

Συνεπώς, από τη σχέση (3.4) συνάγουμε ότι

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^p \|T(x_i)\|^p\right)^{1/p} \le \pi_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}}.$$

Το συμπέρασμα προκύπτει για $\alpha_i = \|T(x_i)\|^{\frac{q-p}{p}}$ και μάλιστα $\pi_q(T) \le \pi_p(T)$.

□

3.2 Η ανισότητα του Kintchine

Ορίζουμε $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t), n \in \mathbb{N}$ να είναι οι **συναρτήσεις Rademacher** στο $[0,1]$, δηλαδή, αν διαμερίσουμε το διάστημα $[0,1]$ στα 2^n υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$:

$$\Big[0, \frac{1}{2^n}\Big), \Big[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\Big), \dots, \Big[1 - \frac{1}{2^n}, 1\Big),$$

τότε, οι τιμές της r_n σε αυτά είναι -1,1 εναλλάξ. Οι συναρτήσεις Rademacher ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη ορθογωνιότητας. Ας είναι φυσικοί αριθμοί $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ και $p_1, p_2, \dots, p_m$, τότε

$$\int_0^1 r_{k_1}^{p_1}(t) r_{k_2}^{p_2}(t) \dots r_{k_m}^{p_m}(t)\,dt = \begin{cases} 1 & , \quad p_1, \dots, p_m \in 2\,\mathbb{N} \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ιδιαίτερα, η $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον $L_2[0,1]$ και μάλιστα για κάθε ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, ισχύει:

$$\int_0^1 \left|\sum_{n=1}^\infty \alpha_n r_n(t)\right|^2 dt = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2.$$

Οστόσο, η $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση στον $L_2[0,1]$. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι είναι ορθοκανονική βάση, τότε για τυχαίο $f \in L_2[0,1]$, αν $\langle f, r_n\rangle = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N} \Rightarrow f = 0$. Αν $f(t) = r_1(t) r_2(t) \in L_2[0,1]$, τότε $\langle f, r_n\rangle = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αλλά $f \ne 0$ το οποίο είναι άτοπο.

Θεωρούμε τις r_n ως τυχαίες μεταβλητές στον χώρο μέτρου πιθανότητας $([0,1], \mathscr{B}([0,1]), \lambda)$, όπου $\mathscr{B}([0,1])$ η σ-άλγεβρα των Borel συνόλων του $[0,1]$ και λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Επίσης, ισχύουν $r_n^2 = 1$ και $\lambda([r_n = 1]) = \lambda([r_n = -1]) = \frac{1}{2}$.

Η ακόλουθη διπλή ανισότητα δείχνει ότι στον υπόχωρο του $L_2[0,1]$ που παράγουν οι συναρτήσεις r_n όλες οι L_p-μετρικές ($p \ge 1$) είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 3.2.1 (Ανισότητα Kintchine). *Για κάθε $1 \le p < +\infty$, υπάρχουν θετικές σταθερές A_p και B_p τέτοιες, ώστε*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \le \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \le B_p \left(\sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \tag{3.5}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Με A_p και B_p συμβολίζουμε τις βέλτιστες σταθερές για τις οποίες ισχύει η σχέση (3.5).

Παρατήρηση 3.2.2. (i) *Η ανισότητα Kintchine ισοδύναμα γράφεται:*

$$A_p \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n \right\|_{L_2} \le \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n \right\|_{L_p} \le B_p \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n \right\|_{L_2}. \tag{3.6}$$

(ii) *Από ανισότητα Hölder αν $p > q$, τότε $\left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p} \ge \left(\int_0^1 |f|^q \right)^{1/q}$. Έτσι,*

$$A_q \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n \right\|_{L_2} \le \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n \right\|_{L_q} \le \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n \right\|_{L_p} \le B_p \left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n r_n \right\|_{L_2}.$$

Συνεπώς, $A_q \le A_p$ και $B_q \le B_p$.

Παραθέτουμε την απόδειξη της ανισότητας (3.5)

Απόδειξη. Αρχικά, αν $p = 2$, τότε $A_2 = B_2 = 1$. Επίσης, γίνεται σαφές από την προηγούμενη παρατήρηση ότι αν $p \ge 2$, τότε $A_p = 1$ και αν $1 \le p \le 2$, τότε $B_p = 1$. Οπότε, αρκεί να βρούμε κατάλληλες σταθερές A_p και B_p, όταν $1 \le p < 2$ και $p > 2$, αντίστοιχα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(1) Αν $p \in \{3, 4, 5, \dots\}$: Ορίζουμε $f(t) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k(t)$ και υποθέτουμε ότι $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$. Εφόσον, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $|x|^p < p! + |x|^p = p! \left(1 + \frac{|x|^p}{p!} \right) \le p! \cdot e^{|x|}$, προκύπτει ότι

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt \le p! \int_0^1 e^{|f(t)|} dt \le p! \int_0^1 \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)} \right) dt. \tag{3.7}$$

Οπότε, δεδομένου ότι οι συναρτήσεις r_k είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, έπεται

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{f(t)} dt &= \int_0^1 \prod_{k=1}^{n} e^{\alpha_k r_k(t)} dt = \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 e^{\alpha_k r_k(t)} dt \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{[r_k = 1]} e^{\alpha_k} d\lambda + \int_{[r_k = -1]} e^{-\alpha_k} d\lambda \right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{e^{\alpha_k}}{2} + \frac{e^{-\alpha_k}}{2} \right) = \prod_{k=1}^{n} \cosh(\alpha_k). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Έπειτα, με σύγκριση «όρο προς όρο» των αναπτυγμάτων Taylor των συναρτήσεων $\cosh(x)$ και $e^{\frac{x^2}{2}}$, προκύπτει ότι $\cosh(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, η σχέση (3.8) γίνεται

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt \leq \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{\alpha_k^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2} = \sqrt{e}. \tag{3.9}$$

και λόγω συμμετρίας,

$$\int_0^1 e^{-f(t)} dt \leq \sqrt{e}. \tag{3.10}$$

Έτσι, από τις (3.9) και (3.10) η σχέση (3.7) γίνεται

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt \leq (2\sqrt{e})p! \tag{3.11}$$

Όποτε, από την (3.11) έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k \right\|_{L_p} \leq ((2\sqrt{e})p!)^{1/p} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k \right\|_{L_2}. \tag{3.12}$$

Άρα, η ανισότητα ισχύει με $B_p \leq ((2\sqrt{e})p!)^{1/p}$.

(2) Αν $2 < p < +\infty$: Θεωρούμε $m = [p] + 1$ και παρατηρούμε ότι $p < m$. Οπότε, από τη μονοτονία της L_p νόρμας και την περίπτωση (1) έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k \right\|_{L_p} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k \right\|_{L_m} \leq ((2\sqrt{e})p!)^{1/p} \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k \right\|_{L_2} \leq 2p \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k \right\|_{L_2}. \tag{3.13}$$

(3) Αν $1 \leq p < 2$: Παρατηρούμε ότι το 2 είναι κυρτός συνδιασμός των p και 4. Οπότε, υπάρχει $\theta \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε: $2 = p\theta + 4(1-\theta) \Leftrightarrow \theta = (2-\frac{p}{2})^{-1}$. Αν ορίσουμε $f(t) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k r_k(t)$, τότε από την ανισότητα Hölder και την περίπτωση (2), έπεται

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} \cdot \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt \right)^{1-\theta} \\ &\leq B_4^{4(1-\theta)} \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} \cdot \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{2(1-\theta)}. \end{aligned}$$

Εφόσον $1 - 2(1-\theta) = \frac{p\theta}{2}$, από την προηγούμενη σχέση συνάγουμε ότι

$$B_4^{2-\frac{4}{p}} \|f\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_p}.$$

Άρα, η ανισότητα ισχύει με $A_p \geq B_4^{2-\frac{4}{p}}$.

□

Σχόλιο. *Οι ακριβείς τιμές των A_p και B_p για κάθε p, έχουν υπολογιστεί από τους Szarek [24] και Haagerup [10].*

3.3 Η ανισότητα του Grothendieck

Το 1956 ο Grothendieck [8] απέδειξε ένα θεώρημα το οποίο ονόμασε «το θεμελιώδες θεώρημα της μετρικής θεωρίας των τανυστικών γινομένων». Το θεώρημα τούτο είναι γνωστό ως *η ανισότητα Grothendieck*. Οι Lindenstrauss και Pelczynski [16] έδωσαν μια ισοδύναμη διατύπωση της ανισότητας Grothendieck την οποία θα επικαλεστούμε στην προσπάθεια μας να αποδείξουμε το Θεώρημα 3.0.1.

Θεώρημα 3.3.1 (Ανισότητα Grothendieck)**.** *Υπάρχει θετική σταθερά K με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \in \mathbb{N}$ και $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ πίνακας πραγματικών αριθμών τέτοιο, ώστε*

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} s_i t_j\right| \leq 1, \text{ για κάθε } |s_i| \leq 1 \text{ και } |t_j| \leq 1, i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

τότε για κάθε $\{x_i\}_{i=1}^n$ και $\{y_j\}_{j=1}^n$ σε έναν χώρο Hilbert, ισχύει

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \langle x_i, y_j\rangle\right| \leq K \max_i \|x_i\| \max_j \|y_j\|.$$

Συμβολίζουμε με K_G την ελάχιστη σταθερά για την οποία ισχύει η παραπάνω ανισότητα και την ονομάζουμε ***καθολική σταθερά Grothendieck****. Μάλιστα, $K_G \leq \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right) \cong 2.301$.*

Σχόλιο. *Ο προσδιορισμός της καθολικής σταθεράς Grothendieck παραμένει μέχρι και σήμερα ανοιχτό πρόβλημα. Το μόνο που γνωρίζουμε μετά από διάφορες εκτιμήσεις που έχουν γίνει είναι ότι $1.676 < K_G < 1.783 \approx \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}$.*

Ορίζουμε ως $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ την $(n-1)$ διάστατη σφαίρα στον $n-$ διάστατο ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ και επίσης, συμβολίζουμε με σ το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς τις στροφές μέτρο πιθανότητας πάνω στην S^{n-1}. Τέλος, το πρόσημο ενός πραγματικού αριθμού t ορίζεται να είναι $\operatorname{sign}(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{|t|} & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$

Για την απόδειξη της ανισότητας Grothendieck είναι χρήσιμο το ακόλουθο

Λήμμα 3.3.2. *Ας είναι $x, y \in S^{n-1}$. Τότε, ισχύει:*

$$\int_{S^{n-1}} \operatorname{sign}(\langle x, u\rangle) \operatorname{sign}(\langle y, u\rangle) d\sigma(u) = 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\langle x, y\rangle).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\theta = \arccos(\langle x, y\rangle) \in [0, \pi]$. Εφόσον το σ είναι αναλλοίωτο ως προς τις στροφές, μπορούμε να επιλέξουμε την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ έτσι, ώστε:

$$x = e_1 \text{ και } y = (\cos\theta)e_1 + (\sin\theta)e_2.$$

Θυμίζουμε ότι για τυχαία g φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση με χρήση των (γενικευμένων) πολικών συντεταγμένων $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ (ή αλλιώς αλλαγή μεταβλητής), έχουμε την εξής έκφραση

$$\int_{S^{n-1}} g(u) d\sigma(u) = |S^{n-1}|^{-1} \int_{I^{n-1}} g(u(\phi)) J(\phi) d\phi,$$

όπου $u(\phi) = (u_1(\phi), \dots, u_n(\phi))$ με

$$u_1(\phi) = \prod_{i=1}^{n-1} \sin \phi_i$$
$$\dots$$
$$u_k(\phi) = \cos \phi_{k-1} \prod_{i=k}^{n-1} \sin \phi_i, \ \ k = 2, 3, \dots, n-1$$
$$\dots$$
$$u_n(\phi) = \cos \phi_{n-1},$$

$I^{n-1} = \{\phi : 0 \leq \phi_1 < 2\pi, 0 \leq \phi_2, \dots \phi_{n-1} \leq \pi\}$, η Ιακωβιανή $J(\phi) = \prod_{i=2}^{n-1} (\sin \phi_i)^{i-1}$ και
$|S^{n-1}| = \int_{I^{n-1}} J(\phi) d\phi = 2\pi \prod_{i=2}^{n-1} \int_0^{\pi} (\sin \phi_i)^{i-1} d\phi_i.$
Έπειτα, θεωρώντας τη συνάρτηση $h(u) = \langle x, u \rangle \langle y, u \rangle = u_1(u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta)$, εφαρμόζουμε τα παραπάνω για τη συνάρτηση $g(u) = \mathrm{sign}[h(u)]$ και παίρνουμε:

$$h(u(\phi)) = \left(\prod_{i=2}^{n-1} \sin \phi_i \right)^2 \sin \phi_1 (\sin \phi_1 \cos \theta + \cos \phi_1 \sin \theta),$$

και άρα

$$g(u(\phi)) = \mathrm{sign}(\sin \phi_1 \sin(\phi_1 + \theta)) := f(\phi_1, \theta),$$

όπου $f(\phi_1, \theta) = 1$ στα διαστήματα $(0, \pi - \theta)$ και $(\pi, 2\pi - \theta)$, καθώς $f(\phi_1, \theta) = -1$ στα διαστήματα $(\pi - \theta, \pi)$ και $(2\pi - \theta, 2\pi)$ (Το πρόσημο της f στα παραπάνω διαστήματα προκύπτει αν για σταθεροποιημένο θ μελετήσουμε το πρόσημο της συνάρτησης $f(\phi_1) = \sin \phi_1 \sin(\phi_1 + \theta), \phi_1 \in [0, 2\pi)$).
Από τα παραπάνω έχουμε:

$$\int_{S^{n-1}} g(u) d\sigma(u) = |S^{n-1}|^{-1} \int_{I^{n-1}} f(\phi_1, \theta) J(\phi) d\phi =$$
$$|S^{n-1}|^{-1} \left(\int_0^{2\pi} f(\phi_1, \theta) d\phi_1 \right) \underbrace{\left(\prod_{i=2}^{n-1} \int_0^{\pi} (\sin \phi_i)^{i-1} d\phi_i \right)}_{= \frac{|S^{n-1}|}{2\pi}} =$$
$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(\phi_1, \theta) d\phi_1 \right) =$$
$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi - \theta} f(\phi_1, \theta) d\phi_1 + \int_{\pi - \theta}^{\pi} f(\phi_1, \theta) d\phi_1 + \int_{\pi}^{2\pi - \theta} f(\phi_1, \theta) d\phi_1 + \int_{2\pi - \theta}^{2\pi} f(\phi_1, \theta) d\phi_1 \right) =$$
$$1 - \frac{2\theta}{\pi}.$$

□

Παραθέτουμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος 3.3.1.

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα για δοσμένα $\{x_i\}_{i=1}^n$ και $\{y_j\}_{j=1}^n$ μοναδιαία. Έστω $u \in S^{n-1}$. Ορίζουμε $t_j(u) = \operatorname{sign}\langle u, y_j\rangle$ και $s_i(u) = \operatorname{sign}\langle u, x_i\rangle, i, j = 1, 2, \ldots, n$. Οπότε, από την υπόθεση, ισχύει:

$$-1 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} s_i(u) t_j(u) \leq 1. \tag{3.14}$$

Έτσι, ολοκληρώνοντας πάνω από την S^{n-1} στη σχέση (3.14) και από το Λήμμα 3.3.2, έχουμε

$$-1 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\langle x_i, y_j\rangle)\right) \leq 1. \tag{3.15}$$

Αυτό σημαίνει ότι και ο πίνακας $A_1 = \{\alpha_{i,j}^{(1)}\}$ με στοιχεία τα $\alpha_{i,j}^{(1)} = \alpha_{i,j}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arccos(\langle x_i, y_j\rangle)\right)$, ικανοποιεί την υπόθεση. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι για κάθε $m \geq 1$, ο πίνακας $A_m = \{\alpha_{i,j}^{(m)}\}$ με στοιχεία τα $\alpha_{i,j}^{(m)} = \alpha_{i,j}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arccos(\langle x_i, y_j\rangle)\right)^m$, ικανοποιεί την υπόθεση, δηλαδή,

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arccos(\langle x_i, y_j\rangle)\right)^m\right| \leq 1. \tag{3.16}$$

Θέτοντας $\theta := \arccos(\langle x_i, y_j\rangle)$, παρατηρούμε ότι $\langle x_i, y_j\rangle = \cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, από το οποίο έπεται ότι

$$\langle x_i, y_j\rangle = \sum_{m=o}^{\infty}(-1)^m \frac{(\frac{\pi}{2} - \theta)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=o}^{\infty}(-1)^m \frac{(\frac{\pi}{2})^{2m+1}}{(2m+1)!}\left(1 - \frac{2\arccos(\langle x_i, y_j\rangle)}{\pi}\right)^{2m+1}.$$

Τέλος, με χρήση της σχέσης (3.16) συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\langle x_i, y_j\rangle\right| &\leq \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(\frac{\pi}{2})^{2m+1}}{(2m+1)!}\left|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arccos(\langle x_i, y_j\rangle)\right)^{2m+1}\right| \\ &\leq \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(\frac{\pi}{2})^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}}{2} = \sinh(\frac{\pi}{2}).\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.3.3. *Το συμπέρασμα στο Θεώρημα 3.3.1 εξακολουθεί να ισχύει και για μη τετραγωνικούς πίνακες.*

3.4 Εφαρμογές των ανισοτήτων Grothendieck και Kintchine

Τα επόμενα αποτελέσματα αφορούν p- απολύτως αθροίσιμους τελεστές και αποδεικνύονται με εφαρμογή της ανισότητας του Grothendieck.

Πρόταση 3.4.1. *Κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T\colon \ell_1 \to \ell_2$ είναι απολύτως αθροίσιμος και τέτοιος, ώστε $\pi_1(T) \leq K_G\|T\|$.*

Απόδειξη. Ας είναι $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ η συνήθης βάση του ℓ_1 και διανύσματα $u_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} e_j, i = 1, 2, \ldots, n$ του χώρου ℓ_1^m, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ έτσι, ώστε $\sum_{i=1}^{n} |x^*(u_i)| \leq \|x^*\|$, για κάθε $x^* \in \ell_1^* = \ell_\infty$. Έστω

$\{s_j\}_{j=1}^m \subset [-1,1]$ και έστω $x_s^* \in \ell_1^* = \ell_\infty$ τέτοιο, ώστε $x_s^*(e_j) = \begin{cases} s_j & , \quad 1 \le j \le m \\ 0 & , \quad j > m \end{cases}$
Έτσι, για κάθε $\{t_i\}_{i=1}^n \subset [-1,1]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} t_i s_j \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} t_i s_j \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n t_i \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} s_j \right\| \\ &\le \sum_{i=1}^n |t_i| \left\| \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} s_j \right\| = \sum_{i=1}^n |x_s^*(u_i)| \le \|x_s^*\| \le 1. \end{aligned}$$

Οπότε, ο πίνακας $\{\alpha_{i,j}\}$ ικανοποιεί την υπόθεση της ανισότητας Grothendieck. Επίσης, για κάθε $i = 1,2,\ldots,n$ επιλέγουμε ένα $y_i \in S_{\ell_2}$ τέτοιο, ώστε $\langle T(u_i), y_i\rangle = \|T(u_i)\|$ (για παράδειγμα $y_i = \frac{T(u_i)}{\|T(u_i)\|}$). Τότε, από την ανισότητα Grothendieck, έπεται

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|T(u_i)\| = \sum_{i=1}^n \langle T(u_i), y_i\rangle &= \sum_{i=1}^n \left\langle T\left(\sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} e_j\right), y_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} \langle T(e_j), y_i\rangle \\ &\le K_G \max_j \|T(e_j)\| \max_i \|y_i\| = K_G \|T\| \max_j \|e_j\| = K_G\|T\|. \end{aligned}$$

Επομένως, ο τελεστής T είναι p-απολύτως αθροίσιμος με $\pi(T) \le K_G\|T\|$. □

Θυμίζουμε ότι η νόρμα ενός γραμμικού τελεστή $f\colon X \to Y$ είναι $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in S_X\}$. Το Θεώρημα Hahn-Banach μας δίνει την δυϊκή σχέση $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\}$. Δηλαδή, η νόρμα τυχαίου στοιχείου x, «πιάνεται» σαν κάποια τιμή ενός τελεστή f από τη μοναδιαία σφάιρα του δυϊκού χώρου. Γενικά, υπάρχουν πολλά παραδείγματα χώρων Banach X και Y για τους οποίους ισχύει $\mathcal{B}(X,Y) = \Pi_p(X,Y)$, για κάποιο $p \ge 2$. Για παράδειγμα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.4.2. *Κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T\colon c_0 \to \ell_p$, για $1 \le p \le 2$ είναι $2-$απολύτως αθροίσιμος και τέτοιος, ώστε $\pi_2(T) \le K_G\|T\|$.*

Απόδειξη. Ας είναι $(e_i)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ οι συνήθεις βάσεις των χώρων c_0 και $\ell_p, 1 \le p \le 2$ και έστω $T \in \mathcal{B}(c_0, \ell_p)$. Ορίζουμε τον πίνακα $\{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^\infty$ τέτοιο, ώστε $T(e_i) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_{i,j} f_j,\ i = 1,2,\ldots$.
Επίσης, ας είναι $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in c_0$ τέτοια, ώστε

$$\sum_{k=1}^n |x^*(x_k)|^2 \le 1, \text{ για κάθε } x^* \in B_{\ell_1}. \tag{3.17}$$

Εφόσον $x_k \in c_0$, γράφουμε $x_k = \sum_{i=1}^\infty b_{k,i} e_i$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\left(\sum_{k=1}^n \|T(x_k)\|_p^2\right)^{1/2} \le K_G\|T\|.$$

Παίρνοντας για κάθε $m \in \mathbb{N}$ τις προβολές $P_m\colon c_0 \to c_0$ έτσι, ώστε $P_m(x_k) = \sum_{i=1}^m b_{k,i} e_i$, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=1}^n \|T(P_m(x_k))\|_p^2\right)^{1/2} \le K_G\|T\|.$$

Ισοδύναμα,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|T\left(\sum_{i=1}^{m}b_{k,i}e_i\right)\right\|_p^2\right)^{1/2} \leq K_G\|T\|.$$

Ισοδύναμα,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}b_{k,i}\alpha_{i,j}f_j\right\|_p^2\right)^{1/2} \leq K_G\|T\|.$$

Ισοδύναμα, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{m}b_{k,i}\alpha_{i,j}\right|^p\right)^{2/p}\right)^{1/2} \leq K_G\|T\|.$$

Αν επιλέξουμε ως x^* να είναι τα συνήθη μοναδιαία διανύσματα του ℓ_1, από την 3.17 έπεται άμεσα ότι $\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}^2 \leq 1$. Στόχος μας είναι να φράξουμε τη νόρμα του l_p, και σε αυτό θα μας βοηθήσει ο δυϊκός χώρος. Για κάθε $y^* = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in S_{\ell_p^*}$, $\{t_i\}_{i=1}^m \in \ell_\infty^m$ και $\{s_j\}_{j=1}^n$, τέτοια, ώστε $|t_i|, |s_j| \leq 1,$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ και $j = 1, 2, \dots, n$, έχουμε

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\alpha_j\alpha_{i,j}}{\|T\|}\right)t_is_j\right| = \frac{1}{\|T\|}\left|y_s^*\left(\sum_{i=1}^{n}T(t_ie_i)\right)\right| \leq \frac{1}{\|T\|}\cdot\|y_s^*\|\cdot\|T\|\left\|\sum_{i=1}^{m}t_ie_i\right\|_\infty \leq 1,$$

όπου $y_s^* = (\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2, \dots,) \in B_{\ell_p^*}$. Οπότε, ο πίνακας $\left\{\frac{\alpha_i\alpha_{i,j}}{\|T\|}\right\}_{i,j=1}^{m,n}$ ικανοποιεί την υπόθεση της ανισότητας Grothendieck. Στη συνέχεια, θεωρούμε τα m-διανύσματα $u_i = (b_{1,i}, b_{2,i}, \dots, b_{n,i})$, με $1 \leq i \leq m$ μέσα στον ℓ_2^n και έπειτα επιλέγουμε $z_j \in B_{\ell_2^n}, j = 1, 2, \dots, n$, τέτοια, ώστε

$$\left\langle\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}\alpha_ju_i, z_j\right\rangle = \left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}\alpha_ju_i\right\|_2 \quad \left(\text{για παράδειγμα } z_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,j}\alpha_ju_i}{\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,j}\alpha_ju_i\right\|_2}\right).$$

Συνεπώς, από τα παραπάνω συνάγουμε ότι

$$K_G \geq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_j\alpha_{i,j}}{\|T\|}\langle u_i, z_j\rangle = \frac{1}{\|T\|}\sum_{j=1}^{n}\left\langle\sum_{i=1}^{m}\alpha_j\alpha_{i,j}u_i, z_j\right\rangle = \frac{1}{\|T\|}\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}\alpha_ju_i\right\|_2.$$

Επομένως, για κάθε $y^* = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in S_{\ell_p^*}$, ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n}\left\|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}\alpha_ju_i\right\|_2 = \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}b_{k,i}\right|^2\right)^{1/2} \leq K_G\|T\|.$$

Δηλαδή,

$$\sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}b_{k,i}\right|^2\right)^{1/2} : y^* \in S_{\ell_p^*}\right\} \leq K_G\|T\|.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία

$$\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}b_{k,i}\right|^2\right)^{1/2}\right\}_{j=1}^{\infty}\in\ell_p$$

και μάλιστα

$$\left\|\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}b_{k,i}\right|^2\right)^{1/2}\right\}_{j=1}^{\infty}\right\|_p\le K_G\|T\|.$$

Οπότε,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i,j}b_{k,i}\right|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p}\le K_G\|T\|.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την τριγωνική ιδιότητα στον $\ell_{2/p}$ (θυμίζουμε ότι $p\ge 2$) και την τελευταία σχέση, τελικά συνάγουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n}\|T(x_k)\|^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\left|\sum_{i=1}^{m}b_{k,i}\alpha_{i,j}\right|^p}_{:=c_{j,k}}\right)^{2/p}\right)^{1/2} = \left[\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\infty}c_{j,k}\right)^{2/p}\right)^{p/2}\right]^{1/p}\\ &= \left(\left\|\left\{\sum_{j=1}^{\infty}c_{j,k}\right\}_{k=1}^{n}\right\|_{2/p}\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|(c_{j,k})_{k=1}^{n}\|_{2/p}\right)^{1/p}\\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}c_{j,k}^{2/p}\right)^{p/2}\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{m}b_{k,i}\alpha_{i,j}\right|^2\right)^{p/2}\right)^{1/p}\le K_G\|T\|.\end{aligned}$$

□

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το θεώρημα των L. Schwartz [21] και S. Kwapien [12] το οποίο δείχνει τι συμβαίνει όταν το $p>2$ στην Πρόταση 3.4.2.

Θεώρημα 3.4.3. *Αν $2<p<r<+\infty$, τότε $\mathcal{B}(c_0,\ell_p)=\Pi_r(c_0,\ell_p)$. Γενικά, $\mathcal{B}(c_0,\ell_p)\neq\Pi_p(c_0,\ell_p)$.*

Επανερχόμαστε τώρα στο ερώτημα μοναδικότητας unconditional βάσης. Με τη θεωρία που έχουμε δώσει μέχρι τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το **αναγκαίο** του Θεωρήματος 3.0.1. Θα αποδείξουμε λοιπόν ότι οι χώροι c_0,ℓ_1,ℓ_2 έχουν μοναδική unconditional βάση (ως προς ισοδυναμία).

Για τον ℓ_2: Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μοναδιαία unconditional βάση του ℓ_2 και θέτουμε $ubc\{u_n\}=K$. Από τον γενικό κανόνα του παραλληλογράμμου για κάθε $\{x_i\}_{i=1}^n$ σε έναν χώρο Hilbert, ισχύει:

$$\operatorname*{aver}_{\{\epsilon_i=\pm1\}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2, \tag{3.18}$$

όπου $\underset{\{\epsilon_i=\pm 1\}}{\text{aver}} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\| = 2^{-n} \sum_{\epsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|$.
Εφόσον η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional βάση του ℓ_2, για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i u_i \right\|_2 \leq K \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\|_2 .$$

Θέτοντας όπου α_i το $\epsilon_i \alpha_i$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ συνάγουμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\|_2 \leq K \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i u_i \right\|_2 . \tag{3.19}$$

Οπότε, από τις σχέσεις (3.18), (3.19) και το γεγονός ότι η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μοναδιαία, έπεται

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\|_2 \leq K \left(\underset{\{\epsilon_i=\pm 1\}}{\text{aver}} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i u_i \right\|_2^2 \right)^{1/2} = K \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} .$$

Με ανάλογο επιχείρημα αποδεικνύεται και η ανισότητα:

$$\frac{1}{K} \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right\|_2 .$$

Οπότε, η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_2. Συνεπώς, ο ℓ_2 έχει μοναδική unconditional βάση.

Για τον ℓ_1: Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μοναδιαία unconditional βάση του ℓ_1 και έστω ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια, ώστε $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n u_n$ να συγκλινει στον ℓ_1. Ορίζουμε τον γραμμικο τελεστή $S\colon c_0 \to \ell_1$ ως $S(\lambda_1, \lambda_2, \dots) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \alpha_n u_n$ ο οποίος είναι καλά ορισμένος και φραγμένος, αφού από την Πρόταση 2.2.12, ισχύει:

$$\|S(\lambda_1, \lambda_2, \dots)\|_1 = \left\| \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \alpha_n u_n \right\|_1 \leq K \cdot \left(\sup_n |\lambda_n| \right) \left\| \sum_{n=1}^\infty \alpha_n u_n \right\|_1 ,$$

όπου $K = ubc\{u_n\}$. Από την Πρόταση 3.4.2, έχουμε

$$\pi_2(S) \leq K_G \|S\| \leq K_G \cdot K \left\| \sum_{n=1}^\infty \alpha_n u_n \right\|_1 \tag{3.20}$$

Ισχυρισμός.

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} \leq K_G \cdot K \left\| \sum_{n=1}^\infty \alpha_n u_n \right\|_1$$

Πραγματικά, έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $|\alpha_i| = \|\alpha_i u_i\|_1 = \|S(e_i)\|_1$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Εφόσον, ο τελεστής S είναι 2-αθροίσιμος, έχουμε

$$\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|S(e_i)\|_1{}^2 \right)^{1/2} \leq \pi_2(S) \cdot \sup_{x^*\in B_{\ell_1}} \left(\sum_{i=1}^n |x^*(e_i)|^2 \right)^{1/2} . \tag{3.21}$$

Εφόσον $\sup_{x^* \in B_{\ell_1}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x^*(e_i)|^2 \right)^{1/2} \leq 1$, από τις σχέσεις (3.20) και (3.21) έπεται άμεσα ο εν λόγω ισχυρισμός.

Συνεπώς, ο τελεστής $T\colon \ell_1 \to \ell_2$ τέτοιος, ώστε $T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n\right) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ είναι γραμμικός και φραγμένος με νόρμα $\|T\| \leq K_G \cdot K$. Έτσι, από την Πρόταση 3.4.1 έπεται ότι

$$\pi(T) \leq K_G \|T\| \leq K_G^2 \cdot K.$$

Οπότε, από την Πρότασης 3.1.3 και από το γεγονός ότι $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional, για κάθε $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \in \ell_1$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \|T(u_n)\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|T(\alpha_n u_n)\|_2 \leq \pi_1(T) \cdot \sup_{x^* \in B_{\ell_\infty}} \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(\alpha_n u_n)| \\ &= \pi_1(T) \sup_{\epsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i \alpha_i u_i \right\|_1 \leq K_G^2 \cdot K^2 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \right\|_1 . \end{aligned}$$

Επίσης, μέσω της τριγωνικής ιδιότητας ισχύει:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \right\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|.$$

Οπότε, η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1. Συνεπώς, ο ℓ_1 έχει μοναδική unconditional βάση.

Για τον c_0: Έστω $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μοναδιαία unconditional βάση του c_0 και θέτουμε $K = ubc\{u_n\}$. Τότε, από το Θεώρημα 2.3.1 η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συρρικνούσα, και αυτό σημαίνει ότι ισχύει $\overline{\text{span}}\{u_n^* : n \in \mathbb{N}\} = c_0^* = \ell_1$. Επειδή η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional βάση του c_0, έχουμε ότι η $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional βάση του ℓ_1 και μάλιστα, $ubc\{u_n\} = ubc\{u_n^*\} = K$. Έτσι, από το πρώτο σκέλος της απόδειξης η ακολουθία $\left(\frac{u_n^*}{\|u_n^*\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του $\ell_1 = c_0^*$. Εφόσον, $1 \leq \|u_n^*\| \leq 2K$, έχουμε ότι $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_1. Οπότε, για κάθε $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ υπάρχουν θετικές σταθερές M_1, M_2 τέτοιες, ώστε

$$M_1 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^* \right\|_1 \leq M_2 \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \tag{3.22}$$

Στη σχέση (3.22) είναι σαφές ότι η δεξιά ανισότητα ισχύει πάντα για $M_2 = K$. Αξιοποιώντας την αριστερή ανισότητα, για κάθε $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n^* \in \ell_1 = c_0^*$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} |x^*(u_i)| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \frac{1}{M_1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i^* \right\| = \frac{1}{M_1} \|x^*\|$$

Επομένως, υπάρχει θετική σταθερά $M := \frac{1}{M_1}$ τέτοια, ωστε για κάθε $x^* \in \ell_1$

$$\sum_{i=1}^{n} |x^*(u_i)| \leq M \|x^*\|.$$

Από αυτό προκύπτει ότι για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ και κάθε $x^* \in B_{\ell_1}$, ισχύει:

$$\left| x^* \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| |x^*(u_i)| \leq M \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \right\|_\infty \leq M \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|.$$

Η άλλη κατεύθυνση έπεται άμεσα από το γεγονός ότι η ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι unconditional (με χρήση του τελεστή P_σ). Οπότε, η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0. Συνεπώς, ο c_0 έχει μοναδική unconditional βάση.

Σε αντίθεση με τους χώρους c_0, ℓ_1, ℓ_2, υπάρχει τουλάχιστον μία μοναδιαία unconditional βάση στον χώρο $\ell_p, 1 < p < +\infty, p \neq 2$, οι οποία δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του. Για την απόδειξη αυτού χρήσιμο είναι το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.4.4. *Για κάθε $1 < p < +\infty$, ο ℓ_2 εμφυτεύεται συμπληρωματικά στον $L_p[0,1]$.*

Απόδειξη. Αρχικά για $1 \leq p < +\infty$, ορίζουμε τον υπόχωρο $R_p \coloneqq \overline{\text{span}}\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $L_p[0,1]$, όπου $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των συναρτήσεων Rademacher. Η ανισότητα Kintchine μας εξασφαλίζει ότι η ακολουθία $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_2. Οπότε, ο R_p είναι ισόμορφος με τον ℓ_2. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι για $1 < p < +\infty$ ο R_p είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_p[0,1]$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) Για $p \geq 2$ θεωρούμε την απεικόνιση $P\colon L_p[0,1] \to R_p$ η η οποία ορίζεται ως εξής:

$$P(f) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(t) r_n(t) dt \right) r_n, \ \ f \in L_p[0,1].$$

Η P είναι γραμμική και καλά ορισμένη, διότι $f \in L_p[0,1] \subset L_2[0,1]$, και άρα η προηγούμενη σειρά συγκλινει στον $L_2[0,1]$. Επισης, η P είναι προβολή του $L_p[0,1]$ επί του R_p, διότι για $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k r_k \in R_p$ από την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Rademacher, ισχύει:

$$P(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k r_k(t) \right) r_n(t) dt \right) r_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n = f.$$

Επίσης, η προβολή P είναι φραγμένη. Πραγματικά, από τις ανισότητες Kintchine και Bessel συνάγουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|P(f)\|_p^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(t) r_n(t) dt \right) r_n \right\|_p^2 \leq B_p^2 \ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(t) r_n(t) dt \right|^2 \\ &\leq B_p^2 \ \|f\|_2^2 \leq B_p^2 \ \|f\|_p^2. \end{aligned}$$

(ii) Για $1 < p < 2$, θεωρούμε την P όπως στην προηγούμενη περίπτωση αλλά μόνο για συναρτήσεις f στον $L_p[0,1] \cap L_2[0,1]$ (ο οποίος είναι πυκνός στον $L_p[0,1]$). Έτσι, από την ανισότητα Kintchine, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\|P(f)\|_p &\leq \underbrace{B_2}_{=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f(t) r_n(t) dt \right|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \int_0^1 f(t) r_n(t) dt \right) : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_0^1 f(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t) \right) dt : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \|f\|_p \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t) \right\|_q : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \|f\|_p \cdot B_q \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r_n(t) \right\|_2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = 1 \right\} = B_q \|f\|_p .
\end{aligned}$$

Τέλος, επειδή το πεδίο ορισμού είναι πυκνό στον $L_p[0,1]$, ο τελεστής P επεκτείνεται συνεχώς στον L_p διατηρώντας την ίδια νόρμα.

□

Πρόταση 3.4.5. *Έστω $1 < p < +\infty, p \neq 2$. Τότε, ο χώρος ℓ_p έχει δύο μη ισοδύναμες μοναδιαίες unconditional βάσεις.*

Απόδειξη. Για τυχόν $1 < p < +\infty, p \neq 2$, θα κατασκευάσουμε μια μοναδιαία unconditional βάση στον χώρο ℓ_p , η οποία δεν είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $F_p^{(n)}$ να είναι ο υπόχωρος του $L_p[0,1]$ που παράγεται από τις χαρακτηριστηκές των δυαδικών διαστημάτων της οικογένειας $\left\{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}] : k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\right\}$ και ορίζουμε τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $R_p^{(n)} = \text{span}\{r_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$. Είναι σαφές ότι ο $F_p^{(n)}$ είναι ισομετρικός με τον $\ell_p^{2^n}$ και από την ανισότητα Kintchine, ο $R_p^{(n)}$ είναι ισομετρικός με τον ℓ_2^n. Ακόμη, θεωρούμε την $P\big|_{F_p^{(n)}} : F_p^{(n)} \to R_p^{(n)} \subset F_p^{(n)}$, όπου P η προβολή που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο λήμμα. Η $P\big|_{F_p^{(n)}}$ είναι φραγμένη γραμμική προβολή (με νόρμα ανεξάρτητη της επιλογής του n αφού $\|P\| \leq B_p$). Έτσι, ορίζεται μια προβολή από τον

$$(F_p^{(1)} \oplus F_p^{(2)} \oplus \ldots \oplus F_p^{(n)} \oplus \ldots)_p \cong (\ell_p^2 \oplus \ell_p^{2^2} \oplus \cdots \oplus \ell_p^{2^n} \oplus \ldots)_p \cong \ell_p$$

στον

$$(R_p^{(1)} \oplus R_p^{(2)} \oplus \cdots \oplus R_p^{(n)} \oplus \ldots)_p \cong (\ell_2^1 \oplus \ell_2^2 \oplus \cdots \oplus \ell_2^n \oplus \ldots)_p .$$

Επομένως, ο $(\ell_2^1 \oplus \ell_2^2 \oplus \ldots)_p$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του ℓ_p . Επειδή ο ℓ_p είναι πρωταρχικός έπεται ότι $\ell_p \cong (\ell_2^1 \oplus \ell_2^2 \oplus \cdots \oplus \ell_2^n \oplus \ldots)_p$. Η συνήθης βάση του ℓ_p δεν είναι ισοδύναμη με τη φυσιολογική βάση του $(\ell_2^1 \oplus \ell_2^2 \oplus \ldots)_p$. Επομένως,ο χώρος ℓ_p έχει δύο μη ισοδύναμες μοναδιαίες unconditional βάσεις.

□

3.5 Συμμετρικές Βάσεις

Είναι τετριμμένο το γεγονός ότι η συνήθης βαση $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ των χώρων c_0 και ℓ_p, $p \leq 1 \leq +\infty$, εκτός από το ότι είναι unconditinal για αυτούς, είναι και ισοδύναμη προς κάθε μετάθεση δεικτών της.

Ορισμός 3.5.1. *Έστω X χώρος Banach με βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται* ***συμμετρική βάση (symmetric basis)****, αν για κάθε μετάθεση $\pi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ η ακολουθία $(e_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Παρατήρηση 3.5.2. *Από την Πρόταση 2.2.2 αν η μια βάση είναι συμμετρική, τότε είναι και unconditional.*

Πρόταση 3.5.3. *Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμμετρική βάση ενός χώρου Banach X. Τότε, για κάθε μετάθεση $\pi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ο τελεστής $V_\pi\colon X\to X$ που ορίζεται ως $V_\pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{\pi(n)}$ είναι αυτομορφισμός. Επιπλέον, η οικογένεια $\{V_\pi : \pi$ μετάθεση φυσικών αριθμών$\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.*

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι ο τελεστής V_π είναι καλά ορισμένος, γραμμικός, 1-1 και επί. Επίσης, από το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος (βλ. Πρόταση 2.2.4 όπως για τον τελεστή P_σ), ο τελεστής V_π είναι φραγμένος και άρα, από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης συνάγουμε ότι ο V_π^{-1} είναι φραγμένος. Συνεπώς, V_π είναι ένας αυτομορφισμός. Τώρα για να αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\{V_\pi\}_\pi$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x\in X$τέτοιο, ώστε

$$\sup_\pi \|V_\pi(x)\| = \sup_\pi \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_\pi(n)\right\| = +\infty.$$

Έτσι, επιλέγουμε μια μετάθεση $\pi_1\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ για την οποία $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{\pi_1(n)}\right\|\geq 1$ και κατά συνέπεια επιλέγουμε ένα πεπερασμένο σύνολο $\sigma_1\subset\mathbb{N}$ για το οποίο $\left\|\sum_{n\in\sigma_1}\alpha_n e_{\pi_1(n)}\right\|\geq 1$. Στη συνέχεια, επιλέγουμε μια μετάθεση $\pi_2\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ και ένα πεπερασμένο σύνολο $\sigma_2\subset\mathbb{N}$ με $\sigma_1\cap\sigma_2=\emptyset$ και $\pi_1(\sigma_1)\cap\pi_2(\sigma_2)=\emptyset$ έτσι, ώστε $\left\|\sum_{n\in\sigma_2}\alpha_n e_{\pi_2(n)}\right\|\geq 1$. Επαγωγικά, υπάρχουν $(\pi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και $(\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ με $\sigma_k\cap\sigma_j=\emptyset$ και $\pi_j(\sigma_j)\cap\pi_k(\sigma_k)=\emptyset$ για κάθε $j\neq k$ έτσι, ώστε $\left\|\sum_{n\in\sigma_j}\alpha_n e_{\pi_j(n)}\right\|\geq 1$. Οπότε, για κάθε μετάθεση $\pi_0\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ της μορφής $\pi_0(n)=\pi_{2j}(n)$, για κάθε $n\in\sigma_{2j}, j=1,2,\dots,$ έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{\pi_0(n)}$ δε συγκλίνει, πράγμα άτοπο, διότι η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συμμετρική βάση. □

Από το γεγονός ότι κάθε συμμετρική βάση είναι unconditional και την προηγούμενη πρόταση, πηγάζει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 3.5.4. *Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμμετρική βάση ενός χώρου Banach X. Ονομάζουμε* ***συμμετρική σταθερά της βάσης (symmetric basis constant)*** *$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και συμβολίζουμε με $sbc\{e_n\}$ τον αριθμό $sbc\{e_n\}=\sup\{\|M_\epsilon V_\pi\| : \epsilon=(\epsilon_i)\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \pi\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ μετάθεση $\}<+\infty$.*

Παρατήρηση 3.5.5. *Από τον τρόπο που ορίσαμε την συμμετρική σταθερά μιας βάσης είναι σαφές ότι:*

(i) *η συμμετρική σταθερά της βάσης είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την unconditional σταθερά αυτής.*

(ii) *για κάθε* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$, *θέτοντας* $|||x||| = \sup_{(\epsilon_n)} \sup_{\pi} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \alpha_n e_{\pi(n)} \right\|$, *η απεικόνιση* $|||\cdot|||$ *ορίζει μια νόρμα στον* X *τέτοια, ώστε για κάθε* $x \in X$,

$$\|x\| \leq |||x||| \leq K\|x\|,$$

όπου $K = sbc\{e_n\}$.

(iii) *ως προς την νόρμα* $|||\cdot|||$ *η βάση* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *είναι συμμετρική με* $sbc\{e_n\} = 1$.

Πρόταση 3.5.6. *Κάθε συμμετρική βάση* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *σε ένα χώρο Banach* X *είναι ισοδύναμη με όλες τις δυνατές υπακολουθίες της.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (από την προηγούμενη παρατήρηση) ας υποθέσουμε ότι η σταθερά στης συμμετρικής βάσης ισούται με 1. Για κάθε αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ και τυχαίο $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει μετάθεση π τέτοια, ώστε $\pi(i) = n_i$, για $1 \leq i \leq n$. Έτσι, για κάθε $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{\pi(i)} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{n_i} \right\|.$$

□

Ορισμός 3.5.7. *Αν* σ_1, σ_2 *πεπερασμένα και μη κενά υποσύνολα του* $\mathbb{N}$, *τότε λέμε ότι τα* σ_1 *και* σ_2 *είναι* ***διαδοχικά*** *και γράφουμε* $\sigma_1 \prec \sigma_2$, *αν* $\max \sigma_1 < \min \sigma_2$.

Στη μελέτη υποχώρων του X σημαντικό ρόλο παίζουν οι block βάσεις με σταθερούς συντελεστές.

Ορισμός 3.5.8. *Έστω χώρος Banach* X *και μοναδιαία συμμετρική βάση* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *του* X, *με συμμετρική σταθερά* $sbc\{e_n\} = 1$. *Επίσης, ας είναι* $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *μια ακολουθία διαδοχικών υποσυνόλων του* $\mathbb{N}$ *και* $|\sigma_j| := card(\sigma_j)$. *Ο τελεστής* $P_\sigma \colon X \to X$ *ο οποίος ορίζεται ως*

$$P_\sigma \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{n\in\sigma_j} \alpha_n}{|\sigma_j|} \right) \left(\sum_{n\in\sigma_j} e_n \right), \text{ για } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$$

ονομάζεται ***μέση προβολή (averaging projection)***.

Ένα σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι ο κλειστός υπόχωρος που παράγει μια block βάση με σταθερούς συντελεστές είναι συμπληρωματικός στον X.

Πρόταση 3.5.9. *Δεδομένου των παραπάνω, η μέση προβολή είναι μία νόρμας 1 γραμμική προβολή και* $P_\sigma(X) = \overline{\text{span}}\{u_j\}$, *όπου* $u_j = \sum_{n\in\sigma_j} e_n, j = 1, 2, \ldots$. *Με άλλα λόγια, ο κλειστός υπόχωρος που παράγει κάθε block βάση με σταθερούς συντελεστές είναι συμπληρωματικός στον* X.

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $m(k) = |\sigma_1| \cdot |\sigma_2| \ldots |\sigma_k|$ και ορίζουμε την οικογένεια $\{\pi_i\}_{i=1}^{m(k)}$, να είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων π έτσι, ώστε $\pi(n) = n$, για κάθε $n \notin$

$\bigcup_{j=1}^{k} \sigma_j$, $\pi(\sigma_j) = \sigma_j$, για κάθε $j = 1, 2, \dots, k$ και η $\pi\big|_{\sigma_j}$ δρα ως κυκλική μετάθεση στο σ_j (θυμίζουμε ότι μια κυκλική μετάθεση τ στο σύνολο $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$ είναι μία μετάθεση της μορφής $\tau_j(n_i) = n_{i+j(mod k)}$, για $1 \leq i, j \leq k$). Εφόσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συμμετρική βάση, για κάθε $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \in X$ και κάθε $1 \leq i \leq m(k)$, ισχύει $\|y\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi_i(n)} e_n\right\|$. Ορίζουμε τον τελεστή T_i στον X έτσι, ώστε για $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$,

$$T_i(x) = \frac{1}{|\pi_i|} \sum_{\pi\in\pi_i} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi_i(n)} e_n$$

(δηλαδή, είναι ο μέσος όρος πάνω από όλες τις δυνατές επιλογές $\pi \in \{\pi_i\}_{i=1}^{m(k)}$). Έπειτα, γράφουμε τον τελεστή T_i στη μορφή $T_i(x) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\sum_{n\in\sigma_j} \alpha_n}{|\sigma_j|} \right) u_j + \sum_{n\notin\cup_{j=1}^{k}\sigma_j} \alpha_n e_n$.

Οπότε,

$$\|T_i(x)\| = \left\| \frac{1}{|\pi_i|} \sum_{\pi\in\pi_i} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi_i(n)} e_n \right\| \leq \frac{1}{|\pi_i|} \sum_{\pi\in\pi_i} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi_i(n)} e_n \right\| = \frac{1}{|\pi_i|} \sum_{\pi\in\pi_i} \|y\| = \|y\|.$$

Επομένως, $\left\| \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\sum_{n\in\sigma_j} \alpha_n}{|\sigma_j|} \right) u_j \right\| \leq \|y\|$ και επειδή το k είναι αυθαίρετο προκύπτει ότι ο τελεστής P_σ είναι μια καλά ορισμένη γραμμική προβολή νόρμας ίσης με 1. Τέλος, επειδή ο κλειστός υπόχωρος που παράγει η ακολουθία $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ και ο κλειστός υπόχωρος που παράγει κάθε block με σταθερούς συντελεστές ταυτίζονται, προκύπτει ότι κάθε block με σταθερούς συντελεστές είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X. □

Έστω χώρος Banach X με συμμετρική βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Για κάθε μοναδιαία block βάση με σταθερούς συντελεστές $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, κάθε άλλη μοναδιαία block βάση με σταθερούς συντελεστές εμφανίζεται άπειρες φορές στην $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Για παράδειγμα ας πάρουμε τη μοναδιαία block βάση $\frac{1}{\|e_1+e_2\|}(e_1 + e_2)$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και ας θέσουμε ως $k_2 = \|e_1 + e_2\|$. Εφόσον η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συμμετρική, προκύπτει ότι $k_2 = \|e_i + e_j\|$, για κάθε $i \neq j$, δηλαδή, υπάρχουν άπειρες μοναδιαίες block βάσεις $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ οι οποίες έχουν ακριβώς δύο στοιχεία στον φορέα τους. Με άλλα λόγια, $|\{v_n : |\operatorname{supp}(v_n)| = 2\}| = \infty$.

Πρόταση 3.5.10. *Έστω χώρος Banach X με συμμετρική βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Για κάθε $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{N}}$ όπως παραπάνω, ορίζουμε $U \coloneqq \overline{\operatorname{span}}\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$, όπου $u_j = \sum_{n\in\sigma_j} e_n$, $j \in \mathbb{N}$. Τότε, $X \cong X \oplus U$.*

Απόδειξη. Έστω $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μοναδιαία block της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με σταθερούς συντελεστές και τέτοια, ώστε κάθε άλλη μοναδιαία block με σταθερούς συντελεστές να εμφανίζεται άπειρες φορές στην $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Θέτουμε $V \coloneqq \overline{\operatorname{span}}\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον τρόπο που ορίστηκε το V έχουμε ότι $V \oplus V \cong V$ και $V \oplus U \cong V$, για κάθε U όπως στην εκφώνηση. Εφόσον η βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συμμετρική, έπεται άμεσα ότι $X \oplus X \cong X$. Οπότε, $(X \oplus V) \oplus (X \oplus V) \cong X \oplus V$. Από την προηγούμενη πρόταση ο V είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X, δηλαδή, $X = W \oplus V$, για κάποιον υπόχωρο W. Είναι,

$$(X \oplus V) \oplus V \cong X \oplus V = (V \oplus W) \oplus V \cong V \oplus W = X.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $X \oplus V$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X. Οπότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Μέθοδο της Διάσπασης (βλ. Θεώρημα 1.7.6) για τους χώρους X και $X \oplus V$. Επομένως,

$$X \cong X \oplus V \cong X \oplus V \oplus U \cong X \oplus U.$$

□

Παραθέτουμε τώρα την απόδειξη για το **ικανό** του Θεωρήματος 3.0.1.

Έστω χώρος Banach X με μοναδική unconditional βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε, για κάθε μετάθεση $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ακολουθία $(e_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με την ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Οπότε, η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συμμετρική βάση του X. Θεωρούμε $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ μοναδιαία block βάση της $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με σταθερούς συντελεστές και ορίζουμε $U \coloneqq \overline{\operatorname{span}}\{u_j : j \in \mathbb{N}\}$. Από την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε ότι $X \cong X \oplus U$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\{e_1, u_1, e_2, u_2, \dots, e_n, u_n, \dots\}$ είναι μοναδιαία unconditional βάση του X. Έτσι, από την υπόθεση της μοναδικότητας unconditional βάσης συνάγουμε ότι είναι και συμμετρική. Άρα, από την Πρόταση 3.5.6 έχουμε ότι οι $(u_j)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμες. Συνεπώς, από το Θεώρημα 2.4.2 η ακολουθία $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη βάση είτε του c_0, είτε του ℓ_p, για κάποιο $1 \le p < +\infty$. Εντούτοις, από την Πρόταση 3.4.5 κανένας από τους χώρους ℓ_p, $p \neq 1, p \neq 2$ δεν διαθέτει μοναδική unconditional βάση. Άρα, οι μόνοι χώροι που απομένουν με μοναδική unconditional βάση είναι οι c_0, ℓ_1 και ℓ_2.

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space Theory*, Springer, **233**, (2006).

[2] C. Bessaga and A. Pelczynski, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. **17**, 151-164, (1958) .

[3] J. Diestel, H. Jarcow and A. Tonge, *Absolute Summing Operators*, Cambridge University Press, (1995).

[4] A. Dvoretzky and C. Rodgers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Acad. Sci. (U.S.A) **36**, 192-197, (1950)

[5] P. Enflo, *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **130**, 309-317, (1973).

[6] M. Fabian, P. Habala, P. Hajek, V. Montesinos and V. Zizler, *Banach Space Theory, The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*, Springer, (2011).

[7] W. T. Gowers, *A solution to the Schroeder-Bernstein problem for Banach spaces*, Bull. London. Math. Soc. **28**, 297-304, (1996).

[8] A. Grothendieck, *Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Matem. Sao Paulo **8**, 1-79, (1956).

[9] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, Journal of AMS **6**, 851-874, (1993).

[10] U. Haagerup, *The best constants in the Kintchine inequality*, Studia Math. **70**, 231-283, (1981).

[11] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Ann. of Math. **52**, 518-527, (1950).

[12] S. Kwapien, *On a theoreme of L. Schwartz and its applications in absolutely summing operators*, Studia Math. **38**, 193-201, (1970).

[13] J. Lindenstrauss, *On complemented subspaces of m*, Israel J. Math. **5**, 153-156, (1967).

[14] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces I*, Springer-Verlag **92**, (1977).

[15] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces II*, Springer-Verlag **97**, (1979).

[16] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, *Absolute summing operators in $\mathscr{L}_p-$spaces and their applications*, Studia Math. **29**, 275-326, (1968).

[17] J. Lindenstrauss and M. Zippin, *Banach spaces with a unique unconditional basis*, J. Funct. Anal. **3**, 115-125, (1969).

[18] T. Morrison, *An introduction to Banach spaces theory*, John Wiley & Sons, Inc, (2001).

[19] A. Pelczynski, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. **19**, 209-228, (1960).

[20] A. Pelczynski and I. Singer, *On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces*, Studia Math. **25**, 5-25, (1964).

[21] L. Schwartz, *Probabilités Cylindriques et applications radonifiantes*, C. R. Acad. **268**, 646-648, (1969).

[22] I. Singer, *Bases in Banach spaces I*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York, (1970).

[23] A. Szankowski, *A Banach lattice without the aproximation property*, Israel J. Math. **24**, 329-337, (1976).

[24] S. J. Szarek, *On the best constants in Kinchin inequality*, Studia Math. **58**, 197-208, (1976).

[25] M. Zippin, *On perfectly homogeneous bases in Banach spaces*, Israel J. Math. **4**, 265-272, (1966).

[26] Α. Γιαννόπουλος, *Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης, (2003).*

[27] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, (1997).*

[28] Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγραπόντης, *Θεωρία Μέτρου, Εκδόσεις Συμμετρία, (2005).*